الأساليب الكمية
في العلوم الإدارية

اصدار -2019

رقم الايداع:862 /8 /2012

التحـريـــر : هيئـة تحريـر
تصميم الغلاف : نضال جمهور
الصف والإخراج : سامي أبو سعدة
المطبعة : مطبعة رشاد برس -بيروت

اليازوري
دار اليـــازوري العلمية للنشر والتوزيع

عمان-العبدلي-مقابل مجلس النواب
هاتف:4626626 6 962+ **تلفاكس: 4614185 6 962+**
ص.ب:520646 **الرمز البريدي: 11152**
www.yazori.com **info@yazori.com**

الأساليب الكمية في العلوم الإدارية

الدكتور
محمد دباس الحميد

الدكتور
محمد العـــــزاوي

المحتويات

المقدمة

شهد علم الإدارة تطورا كبيرا وبشكل خاص بعد الثورة الصناعية في القرن الثامن عشر , نتيجة نشوء المشاريع الكبيرة والضخمة التي احتاجت لجهود كبيرة في إدارتها , وقد ساهم العديد من العلماء والباحثين في استخدام الطرق العلمية في إدارة هذه المشاريع بهدف تخفيض الكلف وزيادة الإرباح .

ولقد شهد الاهتمام بالأساليب الكمية نمواً متزايداً بسبب ما أضفاه هذا التوجه من ابتعاد عن الأحكام الشخصية في اتخاذ القرارات وبذلك ظهرت مصطلحات وتسميات علمية جديدة تربط علم الإدارة واتخاذ القرارات وفق أسس كمية , ومن هذه التسميات علم الإدارة (Management Science) وبحوث العمليات (Operations Researches). ويشير هذان المصطلحان إلى تطبيق الطرق الكمية في اتخاذ القرارات سعياً وراء تحسين نوعيتها .

صمم الكتاب ليغطي مفردات مناهج الاساليب الكمية في كليات العلوم الادارية والاقتصادية في الجامعات العربية ، حيث يركز على التقنيات والااساليب الكمية في اتخاذ القرارات . وروعي في تأليفه الايضاحات التفصيلية مع التمارين والحالات العملية لتسهيل فهم واستيعاب المادة العلمية.

قسم الكتاب الى خمسة فصول ، حيث يتناول الفصل الاول مقدمة في البرمجة الخطية مركزا على تعريفاتها وأهميتها وفرضياتها ومتطلباتها وتطبيقاتها الاقتصادية في الحياة العملية. في حين يتناول الفصل الثاني طرق حل مشكلة البرمجة الخطية ، بطريقتي الرسم البياني او ما يطلق عليها الطريقة البيانية، كما يتناول الطريق الجبرية. في حين خصص الفصل الثالث للطريقة المبسطة (السمبلكس) حيث تعمل هذه الطريقة بشكل مشابه تماماً للطريقة البيانية في كيفية الوصول للحل الأمثل ، و تقوم هذه الطريقة بفحص ذروات منطقة الامكانات بشكل متسلسل وباستخدام مفاهيم رياضية

بسيطة . ويتم ذلك بشكل متكرر ، وهذا يعني إعادة نفس الإجراءات مرة تلو الأخرى ولحين الوصول للحل الأمثل .

ويتناول الفصل الرابع مشكلات النقل التي تظهر في الحياة العملية بصورة متكررة ، فكثيراً ما يرى المرء شاحنات لنقل البضائع أو ناقلات النفط تسير عبر طرق مختلفة من مواقع عديدة لإيصال هذه المادة الحيوية إلى المستهلك الذي يمكن أن يوجد في أماكن متعددة .
تعد طريقة النقل إحدى الطرق الخاصة في البرمجة الخطية ، والهدف من استخدامها هو نقل الموارد من مصادر إنتاجها أو توفرها المختلفة إلى أماكن استخدامها أو الحاجة إليها ، وذلك بأقل كلفة ممكنة . إن لكل مركز تصدير سعة خاصة به ، ولا يستطيع تزويد كميات من المادة أكثر من الطاقة المحددة له . كما أن لكل مركز استيراد حاجة محددة يطلبها ، وإنه لا يستطيع استهلاك كميات إضافية . إن نقل أي مادة من مركز تصدير إلى مركز استهلاك يرافقه كلف ، والحل الأمثل يحدد الحد الأدنى لكلفة نقل المواد في حدود المتاح والمطلوب .
اما الفصل الخامس والاخير فقد ركز على مشكلة التخصيص والتي تنطلق من فكرة التخصص في العكل وانعكاساته على الاداء ، حيث تسعى لأن يخصص لكل عمل واحد فرد واحد . وهذا يتطلب أن يكون جميع الأفراد قادرين على أداء جميع الأعمال ، ولكن في مستويات مختلفة من الكفاءة . وتسعى الطريقة لتحقيق أعلى مستوى من الأداء سواء كان الهدف زيادة الأرباح أم تخفيض الكلف إلى الحد الأدنى.
آملين ان نكون قد وفقنا لخدمة طلبتنا الاعزاء وساهمنا بشكل متواضع في سد النقص في بعض ما تعانيه المكتبة العربية من نقص في هذا المجال .والله ولي التوفيق.

المؤلفان رمضان 1424 هـ

مقدمة في البرمجة الخطية

أُستخدم مفهوم البرمجة الخطية لأول مرة خلال الحرب العالمية الثانية كأحد أساليب بحوث العمليات باستخدام التحليل الكمي للمساعدة في إيجاد الحلول للعديد من المشكلات الاستراتيجية . ولكن تم التوسع باستخدامه لحل المشكلات على اختلاف أنواعها في مجال الصناعة والزراعة والتجارة والتعليم والصحة...الخ .

يقدم نموذج البرمجة الخطية طريقة كفوءة لتحديد القرار الأمثل (أو الاستراتيجية المثلى) من بين عدد كبير من البدائل , التي يخضع كل منها إلى مجموعة من المحددات والقيود , وبشكل يساهم بتحقيق أهداف الإدارة.

المبحث الاول

تعريف البرمجة الخطية وأهميتها

البرمجة الخطية أسلوب رياضي يهتم بحل المشكلات التي تواجهها الإدارة لوضع الخطط واتخاذ القرارات المتعلقة بتوزيع الموارد المتاحة بين الاستخدامات المتنافسة , بحيث نحقق أعلى مستوى من الأرباح (أو العوائد) أو تقليل الكلف إلى أدنى مستوى ممكن .

وتعرف بأنها أسلوب أو طريقة رياضية علمية تهتم بمعالجة مشكلة تخصيص الموارد أو طاقات محددة لتحقيق هدف معين يعبر عنه بدالة الهدف غرضها زيادة الربح أو تخفيض الكلف ، أما الموارد فتعبر عنها مجموعة المعادلات والمتباينات. وهي طريقة لحل المشاكل التي تبحث عن الأهداف المراد تعظيمها أو تدنيتها. ومن التعريف يتضح أن البرمجة الخطية هي :

1. **أسلوب رياضي يهتم بحل المشكلات .**
2. **أسلوب علمي فني نتوصل بموجبه لأقصى ربح أو اقل كلفة .**
3. **طريقة لإيجاد احسن استخدام للموارد .**
4. **أسلوب يستخدم لتخصيص الموارد النادرة للوصول إلى مقياس أمثل .**

يمكن تحديد أهمية البرمجة الخطية بالجوانب الآتية :-

1. **تحليل المشكلات الإدارية تحليلا رياضيا خاصة تلك التي لا يمكن حلها بالأساليب التقليدية المعتمدة على الرأي الشخصي .**
2. **تحديد افضل تخصيص للموارد النادرة (رأس المال , والموارد , والمكائن, والأفراد) بحيث تنتج افضل تشكيلة وتقديم احسن منفعة للمنظمة .**
3. **التوفيق بين أهداف الإنتاج من خلال :-**
   - **أ. زيادة الأرباح .**
   - **ب. تحقيق افضل استخدام للطاقة الإنتاجية المتاحة .**
   - **ج. تلبية احتياجات السوق والمجتمع .**
4. **حل المشكلات المعقدة ذات المتغيرات الكثيرة , باستخدام الحاسوب .**

المبحث الثاني

فرضيات البرمجة الخطية ومتطلباتها

أولاً: الفرضيات:

تستند البرمجة الخطية على مجموعة من الفرضيات هي :-

1. الخطية : يشترط أن تكون العلاقة في دالة الهدف والمتباينات علاقة خطية . وان هناك علاقة خطية بين المتغيرات المؤثرة في المشكلة . فعند حدوث أي تغير في قيمة إحداها تسبب تغيرات متناسبة وثابتة في قيمة الآخر ويعبر عنها رياضياً

$$Y = ax + b$$

2. الإضافة : يُقصد بذلك أن كميات المواد الأولية الداخلة في الإنتاج وكميات الإنتاج قابلة للإضافة وان مجموع نواتج أنشطة الإنتاج تمثل مجموع نواتج كل نشاط إنتاجي بشكل منفصل(على حده) ويمكن تمثيلها رياضيا:

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n = A\,\mathrm{Re}\,sources$$

3. التجزئة: وتعني إمكانية تقسيم النواتج و مواردها الإنتاجية إلى أجزاء صغيرة فالطاقة الإنتاجية للمصنع هي تجزأ إلى طاقات القسم الأول والثاني والثالث . كما تعني إمكانية التعبير عن النشاط الإنتاجي بخط مستقيم.
4. المحدودية : محدودية الموارد والأنشطة , أي أن هناك ندرة فيها وانه لا يوجد عدد نهائي من الأنشطة البديلة و الموارد المتاحة .
5. العلاقة المحددة : أن تكون جميع العلاقات الرياضية معروفة و ثابتة .
6. التناسب: وجود نسبة ثابتة بين الموارد والإنتاج . فإذا تضاعفت عناصر الإنتاج فأن الإنتاج يزداد بنفس النسبة .
7. عدم السلبية : عدم إمكانية أن يكون حجم النشاط سالباً .
8. الاستقلالية : أن اختيار أي نشاط لا يستلزم بالضرورة اختيار نشاط آخر , أي استقلالية عناصر الإنتاج.
9. التأكد: أن تكون جميع القيم معلومة , ولا توجد قيم احتمالية متطلبات .

ثانياً : المتطلبات :

1. تحديد الهدف :

أي ما تسعى لتحقيقه وهو إما زيادة الأرباح أو تقليل الكلف وتصاغ دالة الهدف بالشكل التالي:

$$\text{Max } Z = 2x + 3y$$ **تعظيم**

$$\text{Min } Z = 2x + 3y$$ **تصغير**

2. توفير عدد من البدائل :

تستخدم البرمجة الخطية عندما تكون لدينا بدائل لحل المشكلة فإذا كان هناك بديل واحد لحل المشكلة إذاً لا داعي لاستخدام البرمجة الخطية. فإذا كانت المنظمة تريد إنتاج نوعين أو اكثر من السلع إذاً هناك بدائل و تصاغ البدائل بالشكل التالي.

X_1 البديل 1 =

X_2 **البديل 2 =**

X_n **البديل** n =

3. محدودية الموارد:

نحتاج لاستخدام البرمجة الخطية عندما تكون الموارد محددة (نادرة) كالموارد البشرية , أو المواد, أو ساعات اشتغال المكائن . فإذا كان لدينا(300 ساعة في القسم الأول وكنا نحتاج لساعتين لانتاج المنتوج الأول و ثلاثة ساعات لانتاج المنتوج الثاني فيعبر عن المشكلة كآلاتي :

$$2x_1 + 3x_2 \leq 300$$

وإشارة أصغر من (< أو تساوي يعني أن الكمية المنتجة من السلع يجب أن تنتج (= ضمن الطاقة المتاحة أو اقل منها.

4. وجود علاقة خطية :

الخطية في البرمجة يجب أن تتوفر في دالة الهدف وفي القيود (الموارد) , بحيث أن أي تغير في كميات الإنتاج يؤدي إلى زيادة الأرباح أو تقليل الكلف بشكل خطي (طردي) مع زيادة كمية الإنتاج . وكذلك الموارد تستنفذ بشكل خطي مع زيادة كمية الإنتاج ومثال ذلك الجدول التالي:

المواد الأولية اللازمة	كمية الإنتاج
4	1
8	2
12	3
16	4

5. القيود غير السالبة :

إن هذا الشرط يلبي إحدى فرضيات البرمجة الخطية و هو شرط عدم السلبية . ولذلك لا يمكن أن يكون أحد القيود ينتج متغيرات سالبة كما يلي:

$$2x_1 + 3x_2 \leq -300$$

المبحث الثالث

استخدامات البرمجة الخطية

هناك استخدامات متعددة للبرمجة الخطية هي :

1. تخطيط ورقابة الانتاج وتحديد المزيج الانتاجي.
2. الاختيار بين طرائق الانتاج المختلفة.
3. السيطرة على طاقات المكائن لتقليل التكاليف.
4. اختيار افضل طرائق توزيع السلع.
5. تحليل العمليات لتحسين الارباح.
6. المساعدة في اتخاذ القرارات الرئيسة للادارة كالتخطيط والرقابة.

ويمكن تلخيص خطوات البرمجة الخطية لاتخاذ قرار علمي بشأن مشكلة ما وفقاً لما يأتي:

1. تحديد المشكلة أو الهدف ضمن افتراضات معينة تتناسب وطبيعة المشكلة أو مع رغبة متخذ القرار .
2. وضع نموذج فكري أو تصور لكافة أبعاد المشكلة . أي أن الدراسة هنا تعتمد على الخبرة والقدرة على التفكير العلمي المنظم الذي يسهل إعداد النموذج المناسب لتحقيق الهدف الذي نريد .
3. إيجاد النموذج العلمي باستخدام الأساليب العلمية المناسبة .يمكن أن نعتبر هذه الخطوات الثلاث مرحلة واحدة، نسميها "النمذجة" .
4. حل النموذج العلمي باستخدام الطرق الرياضية الموافقة ، والبحث عن أفضل الحلول وتطبيقها على المشكلة الحقيقية . وهذا يكون ممكناً باستخدام طرق البرمجة الرياضية .

المبحث الرابع

النمذجة Modeling

تعرف النمذجة بأنها مجموعة إجراءات تتضمن عمليات معقدة مرتبطة مع بعضها لإنشاء نموذج ممثل لمشكلة حقيقية . ويمكن أن تصنينف النماذج وفقاً لما يلي :

1. نماذج فيزيائية : وهي تمثل أنظمة فيزيائية تكون كلفة تصميمها كبيرة أو تأخذ وقتاً طويلاً . فيكون النموذج تبسيط لعرض هذا النظام الفيزيائي الحقيقي . و يكون الهدف من

النمذجة هو تحليل سلوك النظام لمعرفة ميزاته (إذا كان النظام موجوداً) أو من أجل إيجاد أفضل تصميم له في المستقبل (إذا كان النظام فكرة تنتظر التنفيذ) .

2. نماذج ذهنية : يوجد هذا النوع من النماذج في عقل الإنسان فقط . ويتكون نتيجة لتراكم خبرات الانسان وتجاربه . وهذه النماذج غالباً ما تكون غير واضحة وغير محددة ، ولا يمكن التعبير عنها بعلاقات من أي نوع ، ولكنها تساعد الانسان على اتخاذ القرارات ورسم المخططات الضرورية لمسيرة حياته.

3. نماذج رمزية : وهي تتكون من نماذج رياضية وأخرى غير رياضية . نقصد بالنماذج غير الرياضية ، نماذج لغوية (كلامية) ، ونماذج بيانية ، ومخططات . أما النماذج الرياضية فهي ولعدة أسباب تعد الأهم والأكثر استخداماً من كافة أنواع النماذج الأخرى .

وتعرف النمذجة الرياضية Mathematical Modeling بأنها التعبير عن الترابط : بين المتغيرات الفيزيائية لنظام ما بعلاقات رياضية ، أو بشكل آخر هي صياغة مشكلة ما وفق علاقات رياضية يطلق عليها اسم النموذج الرياضي . ولتكوين نماذج رياضية لأي مشكلة أو مشكلة مطروحة لا بد من اتباع الخطوات الآتية :

1. دراسة المشكلة المطروحة وتحديد أهدافها ومكوناتها . فيجب أن تكون هناك هدف ما يراد الوصول إليها، مثل تأمين تعظيم الربح أو تدنية الكلف (تخفيضها) أو توفير بالوقت والجهد . كما يجب تحديد مجاهيل المشكلة التي يجب إيجاد قيمها للوصول للهدف المطلوبة ، هذه المجاهيل يمكن أن تكون كميات إنتاج لمنتوجات معينة أو ساعات عمل في منظمة اقتصادية أو مبالغ من المال لفعاليات معينة أو كميات منقولة على طرق معينة وغير ذلك .

2. تحديد المدخلات والمخرجات في ضوء الإمكانات المتاحة ، وتحديد القيود المفروضة على المشكلة، فمثلاً المنظمة لا تستطيع توفير أكثر من حجم معين من المواد الأولية لأسباب قد تكون خارجة عن إرادتها ، أو في نظام ميكانيكي مثلاً يجب أن لا تزيد سرعته عن حد معين .

3. بيان علاقات التأثير بين مجاهيل المشكلة . فأذا زاد إنتاج أحد المنتوجات في مصنع معين فإن ذلك سيؤدي إلى انخفاض الإنتاج من المنتوجات الأخرى . كما أن هناك شروط يجب أن تحققها هذه المجاهيل بغض النظر عن مردودها من حيث الهدف التي يجب تحقيقها . فمثلاً إذا كان أحد المجاهيل ممثلاً لكمية منتجة ، فيشترط فيه ألا يكون سالباً ، وقد يفترض فيه ألا يقل عن أو أن يزيد عن كمية معينة .

4. بعد تحديد كل ما ورد أعلاه فإنه بالإمكان صياغة المشكلة ضمن علاقات رياضية بمجموعها نطلق عليها اسم " النموذج الرياضي " . وهذا النموذج هو تمثيل للمشكلة بصيغة رياضية قابلة للحل باستخدام إحدى الطرق أو الوسائل المتوفرة في بحوث العمليات .

وعند صياغة النماذج الرياضية لابد من مراعات الملاحظات الاتية:

1. لا تكون المشكلة الحقيقية سهلة الترجمة إلى نماذج رياضية . حتى لو فرضنا أنه من المكن ترجمة أي مشكلة إلى نموذج رياضي ، فإنه ليس من الضروري أن يكون لكل نموذج رياضي حلول . لذلك فإنه من الضروري أن نبسط المشكلة أو نقربها إلى مشكلة أخرى قريبة منها ، وفي الوقت نفسه تكون أسهل للترجمة إلى نموذج رياضي ، على أن نحافظ أثناء عملية تبسيط المشكلة على كل الميزات الأساسية لها .
2. بعد إيجاد النموذج الرياضي وتفسير نتائجه وفق طبيعة المشكلة الحقيقية، إذا كانت هذه النتائج جيدة ومُرْضية ، فإننا نكون قد وفقنا بإيجاد النموذج الرياضي الذي يمثل المشكلة الحقيقية . وإذا لم تكن النتائج مُرْضية ، فإننا نحاول إجراء بعض التعديلات والتغييرات في الفرضيات التي اعتبرناها عند تقريب المشكلة ، أو أن نبحث عن هيكل آخر للنموذج الرياضي .

المبحث الخامس

البرمجة الرياضية Mathematical Programming

إن مشكلة البرمجة الرياضية تعني البحث عن القيمة المثلى (تدنية أو تعظيم) لتابع جبري يضم عدة متغيرات و تخضع هذه المتغيرات لمجموعة من القيود تأخذ صيغة متساويات أو متراجحات يعبر عنها بالشكل التالي :

$$\text{Maximiser } f(X) \text{ أو } \text{Minimiser } f(X)$$

Subject to

$$g_i(X) \le 0 \quad ; \quad i=1,2,\dots,m$$
$$\hbar_j(X) = 0 \quad ; \quad j=1,2,\dots,\ell$$
$$X \in S \subset R^n$$

حيث $X \in R^n$* شعاع مركباته $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ وهذه المركبات هي مجاهيل المشكلة .

* التابع $f(X)$ هو التابع الذي نرغب بإيجاد قيمته المثلى (عظمى أو صغرى) ويدعى دالة الهدف .
* مجموعة المتراجحات $g_i(x) \le 0 \; ; \; (i=1,2,\dots,m)$ ، ومجموعة المتساويات $\hbar_j(X) = 0 \; ; \; (j=1,2,\dots,\ell)$ هي توابع معرفة في الفضاء R^n وتدعى قيود المشكلة .
* نسمي مجموعة الأشعة $X \in R^n$ والتي تحقق جميع قيود المشكلة بالحلول الممكنة . ونسمي المنطقة التي تحوي مجموعة الحلول الممكنة بمنطقة الامكانات.

نسمي الشعاع $X \in R^n$ الذي يحقق جميع قيود المشكلة ويبلغ التابع فيه قيمته المثلى بالحل الأمثل .

إن حل مشكلة البرمجة الرياضية يتطلب إذاً إيجاد الشعاع $X \in R^n$ الذي يحقق جميع القيود ويُبْلِغ دالة الهدف قيمته المثلى .

المبحث السادس

التطبيق الاقتصادي لمشكلة البرمجة الخطية

إذا كان دالة الهدف ومجموعة القيود في مشكلة البرمجة الرياضية ، جميعها من الدرجة الأولى للمتغيرات $x_1 , x_2 , ... , x_n$ فإن البرنامج الرياضي يدعى برنامج خطي . وتعد البرمجة الخطية من أوائل مواضيع بحوث العمليات. .

إذا كان دالة الهدف أو أحد قيود مشكلة برمجة رياضية من الدرجة الثانية فما فوق بالنسبة للمتغيرات $x_1 , x_2 , ... , x_n$ فإننا ندعوها مشكلة برمجة غير خطية .

وتناول فيما يلي بعض التطبيقات البسيطة من مشاكل اقتصادية تؤدي نمذجتها إلى برامج خطية .

حالة تطبيقية (1)

يقوم مصنع للألبسة بإنتاج أربعة أصناف من الملبوسات (S_4 , S_3 , S_2 , S_1) ويستخدم من أجل ذلك المواد الأولية الآتية (M_3 , M_2 , M_1) . ترغب إدارة المصنع بدراسة التنظيم الأمثل للإنتاج خلال فترة شهر وتحديد الإنتاج الشهري لكل منتوج من أجل تحقيق اقصى ربح ، علماً بأن الربح يتناسب طردياً مع عدد الوحدات المباعة.

نرتب المعلومات التي الحصول عليها وفق الجدول التالي :

المواد الأولية	نوع المنتج				الكميات المتوفرة
	S_1	S_2	S_3	S_4	
M_1	1.5	1	2.4	1	2000
M_2	1	5	1	3.5	8000
M_3	1.5	3	3.5	1	5000
ربح الوحدة	5.24	7.3	8.34	4.18	

يتضح من الجدول ما يلي :

1. الكميات المتوفرة من كل مادة أولية خلال فترة الإنتاج (شهر)
2. الاحتياجات من كل مادة أولية في إنتاج واحدة منتج من كل من المنتوجات الأربعة.
3. الربح الناتج عن بيع واحدة المنتج من كل من المنتوجات الأربعة .
4. لنفرض أن x_1 هو عدد الوحدات المنتجة من الصنف الأول S_1 خلال فترة الإنتاج (شهر) .

لنفرض أن x_2 هو عدد الوحدات المنتجة من الصنف الثاني S_2) خلال فترة الانتاج (شهر)

لنفرض أن x_3 هو عدد الوحدات المنتجة من الصنف الثالث S_3 (خلال فترة الانتاج شهر) .

لنفرض أن x_4 هو عدد الوحدات المنتجة من الصنف الرابع S_4 (خلال فترة الانتاج شهر).

إن الكميات المتوفرة من المواد الأولية هي مقادير محدودة ، وبالتالي فإننا لا نستطيع زيادة الإنتاج بشكل عشوائي لأي منتج ، وإنما يجب توزيع الإنتاج بين الأصناف الأربعة بحيث يكون الربح بأعلى مستوى وبدون تجاوز الكميات المتوفرة من كل مادة أولية من المواد الثلاث . كما أنه لا يمكن قصر الإنتاج على صنف واحد أو صنفين من الإنتاج فقط ، وذلك لضرورات السوق أو لتحقيق توازن في استهلاك المواد الأولية .

في إنتاج الأصناف الأربعة من M_1 يلاحظ أنه يتم استهلاك كمية من المادة الأولية الملابس قدرها :

$$1.5x_1 + x_2 + 2.4x_3 + x_4$$

لأنه يلزم كمية قدرها 1.5 من أجل إنتاج واحدة منتج من الصنف الأول ، علماً بأنه يتم إنتاج كمية قدرها x_1 من الصنف الأول S_1 . كما يلزم كمية قدرها 1 من أجل إنتاج واحدة منتج من الصنف الثاني x_2 من الصنف الثاني S_2 ، علماً أنه يتم إنتاج كمية قدرها . وهكذا بالنسبة لبقية الأصناف . ولكن مجموع ما يلزم من المادة الأولية M_1 في إنتاج الأصناف الأربعة لا يمكن أن يتجاوز 2000 (المقدار المتوفر من هذه المادة) ونعبر عن هذا رياضياً بالصيغة الآتية :

$$1.5x_1 + x_2 + 2.4x_3 + x_4 \le 2000 \qquad (1)$$

بطريقة مماثلة ، نستطيع أن نكتب :

القيد الخاص بالمادة الأولية M_2:

$$x_1 + 5x_2 + x_3 + 3.5x_4 \le 8000 \qquad (2)$$

أما القيد الخاص بالمادة الأولية M_3:

$$1.5x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 + x_4 \le 5000 \qquad (3)$$

بالإضافة إلى ذلك ، فإنه لا يمكن إنتاج كميات سالبة ، فإما أن ننتج كمية موجبة من أي صنف أو أن لا ننتج أي كمية على الإطلاق . وبالتالي نحصل على القيود الإضافية :

$$x_4 \ge 0 \;,\quad x_3 \ge 0 \;,\quad x_2 \ge 0 \;,\quad x_1 \ge 0 \qquad (4)$$

وهو ما يسمى بشرط عدم السلبية .

بهذا تحدد جميع القيود المفروضة على متغيرات المشكلة .

واضح أنه إذا تم إنتاج وحدات قدرها x_4 , x_3 , x_2 , x_1 من الأصناف

على الترتيب ، فإن الربح خلال فترة الانتاج سوف يكون: S_4 , S_3 , S_2 , S_1

$$f(X) = 5.24 x_1 + 7.3 x_2 + 8.34 x_3 + 4.18 x_4 \qquad (5)$$

وهو يمثل دالة الهدف .

نرغب الآن بإيجاد قيم المنتوجات x_4 , x_3 , x_2 , x_1 التي تحقق القيود (1 - 4) وتجعل الربح (5) أعظم ما يمكن . وعليه فإننا نكتب النموذج الرياضي لهذه المشكلة بالشكل الإجمالي على النحو التالي :

$$\text{Max} \quad f(X) = 5.24 x_1 + 7.3 x_2 + 8.34 x_3 + 4.18 x_4$$

وفقاً للقيود :

$$1.5 x_1 + x_2 + 2.4 x_3 + x_4 \le 2000$$
$$x_1 + 5 x_2 + x_3 + 3.5 x_4 \le 8000$$
$$1.5 x_1 + 3 x_2 + 3.5 x_3 + x_4 \le 5000$$

وشروط عدم السلبية

$$x_4 \ge 0 \ , \quad x_3 \ge 0 \ , \quad x_2 \ge 0 \ , \quad x_1 \ge 0$$

ملاحظة 1:

يمكن صياغة نموذج رياضي خطي لمشكلة يطلب فيها حساب القيمة العظمى للدالة الهدف بشكل عام كالتالي :

$$\text{Max} \quad f(X) = C^t X$$
$$\text{Subject to}$$
$$A X \le B$$
$$X \ge 0$$

حيث A من المرتبة $m \times n$. والمصفوفة $B \in R^m \ , \ C \in R^n$

حالة تطبيقية (2) :

تخطط شركة لانتاج العلف الحيواني لانتاج ثلاثة أنواع من العلف . كل نوع يتكون من مزيج من المواد الغذائية التي تطحن في مطاحن خاصة لتصبح جاهزة للاستعمال. نرتب المعلومات المعروفة حول هذه المشكلة بالجدول التالي:

المواد الغذائية الداخلة في تركيب العلف	نـوع العـلـف			الاحتياجات الأسبوعية / كلغم
	A	B	C	
I	1	4	2	1500
II	2	2	1	300
III	4	1	1	800
IV	3	2	1	280
V	1	0.75	0.5	187
كلفة الوحدة الواحدة	15	25	30	

يلاحظ في هذا الجدول ما يلي :

- **الاحتياجات الأسبوعية التي يجب تأمينها في السوق .**
- **مقدار ما يلزم من كل مادة أولية في إنتاج واحدة منتوج من كل نوع من أنواع العلف .**
- **كلفة واحدة المنتج من كل نوع من أنواع العلف .**

ترغب المنظمة بوضع نموذج رياضي للعلف الحيواني بحيث تكون الكلف أقل ما يمكن وتحقق جميع الاحتياجات الأسبوعية .

لنفرض أن x_1 **هو عدد الوحدات المنتجة من النوع الأول** A **من العلف خلال فترة الإنتاج(أسبوع) . لنفرض أن** x_2 **هو عدد الوحدات المنتجة من النوع الثاني**B**من العلف خلال فترة الانتاج (أسبوع) .**

لنفرض أن x_3 **هو عدد الوحدات المنتجة من النوع الثالث** C **من العلف خلال فترة الانتاج(أسبوع) .**

يلاحظ أنه يتم استهلاك كمية من المادة الأولية I **في إنتاج المواد الثلاثة من العلف قدرها :** $x_1 + 4x_2 + 2x_3$

لأنه يلزم كمية قدرها 1 **من أجل إنتاج واحدة منتج من النوع الأول** A **من العلف ، علماً أنه يتم إنتاج كمية قدرها** x_1 **من المنتج . وهكذا بالنسبة للنوعين** C , B **.**

لكن كما هو مبين في الجدول إن الاحتياجات الأسبوعية من المادة الأولية I **هو** 1500 **كلغم . لذلك يجب أن لا يقل الإنتاج عن هذه الاحتياجات ، بل يجب أن يكون أكبر منها أو يساويها على الأقل . ونعبر عن ذلك بالشكل التالي :**

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 1500$$

وهذا يشكل القيد الأول في المشكلة .

وبطريقة مماثلة نجد بقية القيود ، أي :

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 300$$
$$4x_1 + x_2 + x_3 \geq 800$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 280$$
$$x_1 + 0.75x_2 + 0.5x_3 \geq 187$$

بالإضافة إلى شرط عدم السلبية ، حيث لا يمكن أن ننتج كميات سالبة من العلف

$$x_3 \geq 0 \;,\quad x_2 \geq 0 \;,\quad x_1 \geq 0$$

الآن ، عند إنتاج الكميات x_3 , x_2 , x_1 من الأنواع C , B , A من العلف ، فإن كلفة الإنتاج تعطى بالشكل :

$$15x_1 + 25x_2 + 30x_3$$

ونحن نرغب بأن تكون هذه الكلفة أصغر ما يمكن . وعليه فإننا نكتب النموذج الرياضي بشكل إجمالي على النحو التالي :

$$\text{Min } f(X) = 15x_1 + 25x_2 + 30x_3$$
$$\text{Subject to}$$
$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 1500$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 300$$
$$4x_1 + x_2 + x_3 \geq 800$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 280$$
$$x_1 + 0.75x_2 + 0.5x_3 \geq 187$$

وشرط عدم السلبية

$$x_3 \geq 0 \;,\quad x_2 \geq 0 \;,\quad x_1 \geq 0$$

ملاحظة2 :

نستطيع صياغة نموذج رياضي خطي لمشكلة يطلب فيها حساب القيمة الصغرى للدالة الهدف بشكل عام كالتالي :

$$\text{Min } f(X) = C^t X$$
$$\text{Subject to}$$
$$AX \geq B$$
$$X \geq 0$$

والمصفوفة $B \in R^m \;,\; C \in R^n$ حيثA من المرتبة $m \times n$.

ملاحظة 3 :

نستطيع بسهولة تحويل مشكلة البحث عن قيمة عظمى لتابع هدف $C^t X$ إلى مشكلة البحث عن قيمة صغرى للدالة الهدف $-C^t X$ ، وذلك بالاستفادة من العلاذقة الآتية :

$$\mathrm{Min}(-C^t X) = -\mathrm{Max}(C^t X)$$

فمثلاً ، لو كان الدالة الهدف $C^t X$ **يأخذ القيم** (1 , 2 , 3 , 4) **فإن** $-\mathrm{Max}(C^t X) = -4$ **والتابع** $C^t X$**-** **يأخذ القيم** (-1 , -2 , -3 , -4) **فإن** $\mathrm{Min}(-C^t X) = -4$.

الفصل الثاني

طرق حل مشكلة البرمجة الخطية

يتناول هذا الفصل طرق حل مشكلة البرمجة الخطية ، بطريقتي الرسم البياني او ما يطلق عليها الطريقة البيانية، كما يتناول الطريق الجبرية. في حين خصص الفصل الثالث للطريقة المبسطة (السمبلكس).

حيث سيتم تناول المحاور التالية:

- **الشكل العام لمشكلة البرمجة الخطية.**
- **الصيغة المعيارية للنموذج الخطي.**
- **الطريقة البيانية ومشكلاتها.**
- **الطريقة الجبرية.**

المبحث الاول

الشكل العام لمشكلة البرمجة الخطية

من خلال التطبيقات السابقة ، يلاحظ أنه يمكن أن تتلخص مشكلة البرمجة الخطية في إيجاد القيم المثلى (التعظيم أو الأصغرية) للتابع الخطي

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$$

Subject to

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad ; \quad i=1,2,\ldots,s$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad ; \quad i=s+1,s+2,\ldots,s+t$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \qquad ; \quad i=s+t+1,\ldots,m$$

$$x_j \ge 0 \qquad ; \quad j=1,2,\ldots,r$$

حيث $a_{ij}\ ,\ b_i\ ,\ c_j$ $(j=1,2,\ldots,n\ ,\ i=1,2,\ldots,m)$ **ثوابت تعين قيمها حسب الخواص الفيزيائية والتقنية للمشكلة المعطاة ، و** x_j **متغيرات القرار .**

بعد إعطاء نموذج البرنامج الخطي لمشكلة ما ، فإننا نتوجه للبحث عن حل هذا النموذج . وبما أن نماذج البرمجة الخطية متنوعة هدفها البحث عن قيمة صغرى أو عظمى لدالة الهدف وخاضعة لقيود قد تكون بشكل ($\ge$ أكبر أو يساوي) أو بالشكل ($\le$ أصغر أو يساوي) أو بالشكل (= يساوي) . فإننا نجد أنه من الضروري تعديل الشكل العام للبرامج الخطية لنتمكن من تطبيق خوارزميات الحل التي نستعرضها في الفصول القادمة .

ولهذا ، نعرف صيغتين للنماذج الخطية ، الصيغة المعيارية والتي تكون مفيدة جداً عند دراسة نظرية الترافق و الصيغة النموذجية المستخدمة مباشرة لحل هذا النموذج الخطي .

المبحث الثاني

الصيغة المعيارية(القانونية) للنموذج الخطي

The Canonical Form of Linear Model

إن الشكل العام المذكور أعلاه للنموذج الخطي ، يمكن أن يوضع دائماً بالشكل المعياري التالي :

$$\text{Max} \quad f(X) = \sum_{j=1}^{n} C_j \, x_j$$

Subject to

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j \le b_i \qquad ; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \ge 0 \qquad ; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

حيث يلاحظ من الشكل المعياري أن جميع متغيرات القرار x_j غير سالبة، وأن جميع القيود من الشكل ($\le$) . كما أنه يطلب إيجاد القيمة العظمى لدالة الهدف .

يمكن أن نضع أي مشكلة برمجة خطية بهذا الشكل المعياري باتباع التحويلات الأولية الآتية :

1. **إذا كان المطلوب هو إيجاد القيمة الصغرى لدالة الهدف $f(X)$ ، فإن هذا مكافئ (رياضياً) لإيجاد القيمة العظمى للتابع $-f(X)$. فمثلاً ، إيجاد القيمة الصغرى للتابع $z = c_1x_1 + ... + c_nx_n$ مكافئ تماماً لعملية إيجاد القيمة العظمى للتابع $Z = -c_1x_1 - .... - c_nx_n$ أي أنه يمكن أن يكون الهدف هو إيجاد القيمة العظمى لدالة الهدف في أي مشكلة برمجة خطية ، ثم نجد بالاستفادة من العلاقة :**

$$\text{Min}(-C^t X) = -\text{Max}(C^t X)$$

القيمة الصغرى لدالة الهدف للمشكلة الأصلية .

2. **إذا كانت المتراجحة من الشكل ($\ge$ أكبر أو يساوي) فإنه يمكن تغيير اتجاهها بضرب طرفيها بـ -1 . فمثلاًً إذا كان القيد الخطي بالشكل : $a_1x_1 + a_2x_2 \ge b$ فإنه مكافئ تماماً للقيد : $-a_1x_1 - a_2x_2 \le -b$**
3. **إذا كان القيد بشكل مساواة ، فإنه يمكن تحويله إلى متراجحتين مختلفتي الاتجاه ومحققتين معاً . فمثلاً القيد : $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ مكافئ للقيدين : $a_1x_1 + a_2x_2 \le b$ و $a_1x_1 + a_2x_2 \ge b$**

4. **إذا كان الطرف الأيسر من قيد متراجحة معطى بالقيمة المطلقة ، فإنــه يمكن تحويلــه إلــى متــراجحتين نظــاميتين. فمــثلاً مــن أجــل** $b \geq 0$ **فــإن القيــد :**

$$| a_1x_1 + a_2x_2 | \leq b$$

مكافئ تماماً للقيدين : $-a_1x_1 - a_2x_2 \leq b$ **و** $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$

5. **إذا كـان أحـد متغيـرات القـرار غيـر مقيـد بشـرط عـدم السـلبية (أي يمكـن أن يكون سالباً أو موجباً أو صفراً) ، فإنه يمكـن التعبيـر عنـه بـالفرق بـين متغيريـن غير سـالبين** x', x'' **كما يلي :**

$$x = x' - x'' \quad ; \quad x' \geq 0 \ , \quad x'' \geq 0$$

حالة تطبيقية 3 :

افترض مشكلة البرمجة الخطية الآتية :

$$\text{Min } z = 3x_1 - 3x_2 + 7x_3$$

Subject to

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 40 \\ x_1 + 9x_2 - 7x_3 &\geq 50 \\ 5x_1 + 3x_2 &= 20 \\ | 5x_2 + 8x_3 | &\leq 100 \\ x_1 \geq 0 \ , \ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

يمكن وضع هذه المشكلة بالشكل المعياري بعد إجراء التحويلات الآتية:

1 - القيد $| 5x_2 + 8x_3 | \leq 100$ **مكافئ للقيدين :**

$$-5x_2 - 8x_3 \leq 100 \qquad \& \ 5x_2 + 8x_3 \leq 100$$

2 - المتغير x_3 **يمكن الاستعاضة عنه بـ** $x_3 = x_3' - x_3''$ **حيث** $x_3'' \geq 0 \ , \ x_3' \geq 0$

3 - دالة الهدف (حيث يطلب حساب قيمتـه الصـغرى) يمكـن الاستعاضـة عنـه بتـابع هدف (يطلب حساب قيمته العظمى) فتصبح المشكلة بالشكل :

$$\text{Max } Z = (-z) = -3x_1 + 3x_2 - 7x_3' + 7x_3''$$

Subject to

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 3x_3' - 3x_3'' &\le 40 \\
-x_1 - 9x_2 + 7x_3' - 7x_3'' &\le -50 \\
5x_1 + 3x_2 &\le 20 \\
-5x_1 - 3x_2 &\le -20 \\
5x_2 + 8x_3' - 8x_3'' &\le 100 \\
-5x_2 - 8x_3' + 8x_3'' &\le 100 \\
x_1 \ge 0\ ,\ x_2 \ge 0\ ,\ x_3' \ge 0\ ,\ x_3'' &\ge 0
\end{aligned}
$$

على أن لا ننسى عند إيجاد القيمة العظمى لدالة الهدف حساب القيمة الصغرى لدالة الهدف للمشكلة الأصلية وفق العلاقة : $\text{Min } z = -\text{Max } Z$

ويمكن كتابة أي مشكلة برمجة خطية بالشكل النموذجي التالي :

أوجد القيمة العظمى أو الصغرى للتابع : $z = C^t X$

وفقاً للشروط :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad ; \quad i = 1, \ldots, m \ \ \& \ \ b_i \ge 0$$

$$x_j \ge 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

يلاحظ في هذا الشكل النموذجي أن جميع القيود هي متساويات ما عدا شروط عدم السلبية تبقى متراجحات. كما أن الطرف الأيمن من كل قيد مساواة يجب أن يكون غير سالب. كما أن جميع متغيرات القرار غير سالبة . أما دالة الهدف في الشكل النموذجي فيمكن أن يطلب حساب قيمته العظمى أو الصغرى .

يمكن تحويل أي مشكلة برمجة خطية من شكلها العام (أو من الشكل المعياري) إلى الشكل النموذجي باتباع الخطوات الآتية ، بالإضافة إلى التحويلات الأولية المذكورة في الفقرة السابقة :

1 - إذا كان القيد عبارة عن متراجحة ($\le$ أصغر أو يساوي) فلتحويله إلى قيد مساواة يكفي أن نضيف إليه متغير جديد غير سالب . فمثلاً، القيد:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$$

يمكن كتابته بالشكل (بعد إضافة المجهول $0 \le x_{n+i}$ **) :**

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j + x_{n+i} = b_i \quad ; \quad x_{n+i} \geq 0$$

أما إذا كان القيد عبارة عن متراجحة ($\geq$ أكبر أو يساوي) ، فيمكن تحويله إلى مساواة بطرح مجهول جديد غير سالب . فمثلاً ، القيد :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \geq b_i$$

يمكن كتابته بالشكل :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j - x_{n+i} = b_i \quad ; \quad x_{n+i} \geq 0$$

تسمى هذه المجاهيل الجديدة غير السالبة بمجاهيل الفروق .

2 - إذا كان الطرف الأيمن من المساواة سالباً فنضرب طرفي المساواة بـ -1

حالة تطبيقية 4 :

اكتب الشكل النموذجي لمشكلة البرمجة الخطية الآتية :

$$\text{Max } Z = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5$$

Subject to

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 &\leq 2 \\
x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 &\leq 3 \\
2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 &\leq 6 \\
x_1 + x_4 - 5x_5 &\geq 8 \\
(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &\geq 0
\end{aligned}$$

إن الشكل النموذجي للمشكلة المعطاة هو :

$$\text{Max } Z = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5$$

Subject to

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 &= 2 \\
x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 &= 3 \\
2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 &= 6 \\
x_1 + x_4 - 5x_5 - x_9 &= 8 \\
(x_1, x_2, \ldots, x_9) &\geq 0
\end{aligned}$$

ملاحظة 1 :

يلعب الشكل النموذجي دوراً هاماً في إيجاد حل مشاكل البرمجة الخطية ، حيث تم تحويل قضية البحث عن حل لمشكلة برمجة خطية إلى عملية البحث عن حل لجملة معادلات خطية مؤلفة من m معادلة بـ m + n مجهول . وحل هذه الجملة من المعادلات يكون مفيداً

إذا كان ممكناً ، أي إذا كان يحقق شروط عدم السلبية $x_j \geq 0$. وبالتالي ، فإن الحل الأمثل للبرنامج الخطي يكون معطى بالحل الممكن الذي يجعل قيمة التابع مثلى .

إن فكرة تحويل مشكلة البحث عن حل برنامج خطي إلى مشكلة البحث عن حل لـ m معادلة بـ $m + n$ مجهول هي فكرة جيدة ، ولكن يمكن الحصول في هذه الحالة على عدد غير منته من الحلول، وهنا تكمن المشكلة. وبالتالي ، بما أنه غير ممكن تحديد نقطة الحل الممكن حسابياً ، فهناك حاجة إلى خوارزمية لتحديد نقطة الحل الأمثل بعد إيجاد عدد محدود من نقاط الحل .

ملاحظة 2 :

في حل جملة المعادلات الخطية :

$$A_{m.n} . X = B \quad ; \quad B \in R^m \;\; \& \;\; X \in R^n \quad (m < n \; , \; r(A) = m)$$

حيث نعني بـ $r(A)$ رتبة المصفوفة A.

نقول عن مجموعة الأشعة $A_{\bullet J}$ أنها تشكل أساساً في هذه الجملة إذا كان $|J| = m$ وإذا كان $r(A_{\bullet J}) = m$. يلاحظ أن كل أساس في هذه الجملة يعين حلولاً لها على الشكل :

$$X_J = A_{\bullet J}^{-1} . B - A_{\bullet J}^{-1} . A_{\bar{J}} . X_{\bar{J}}$$

حيث J. أدلة مجاهيل الأساس و $\bar{J}$ أدلة بقية المجاهيل

ملاحظة 3 :

في الواقع إذا كان $r(A) < m$. فهذا يعني أن $r(A) = m$ يمكننا دائماً أن نفرض هناك سطراً أو عدة أسطر من هذه المصفوفة يمكن كتابتها كتركيب خطي للأسطر الأخرى . إن القيود المقابلة لهذه الأسطر يمكن أن تكون زائدة (وفي هذه الحالة يمكن حذفها من قيود المشكلة) أو أن تكون غير متوافقة مع بقية الأسطر (في هذه الحالة لا يوجد حل لجملة المعادلات $A . X = B$. وذلك حسب قيم الثوابت b_i ،)

تعريف 3 :

نقول عن الشعاع $X \in R^n$ أنه حلاً أساسياً للشكل النموذجي لبرنامج خطي، إذا كان ناتجاً عن أساس وإذا كانت قيم المجاهيل من خارج هذا الأساس (أو القاعدة) معدومة. ونقول أنه لدينا حلاً أساسياً إذا كان عدد عناصره غير المعدومة (أي الموجبة تماماً) لا يتجاوز m هو الحل الأساس $X = A_{\bullet J}^{-1} . B$ ، أي عندما يكون الحل المقابل لهذا الأساس، عندما يكون الأساس المكون من الأعمدة ذات الأدلة J.

المبحث الثالث

الطريقة البيانية Graphical Method

تعد الطريقة البيانية من الطرق الاساسية لحل النموذج الرياضي للبرمجة الخطية .وهي عبارة عن رسم بياني لنموذج البرمجة الخطية . تستخدم هذه الطريقة فقط في حل مشاكل البرمجة الخطية التي تحتوي على متغيرين (مجهولين) أو ثلاثة . ونظراً لصعوبة تمثيل المشاكل ذات ثلاثة متغيرات في الطريقة البيانية ، فإننا نقتصر على استخدام هذه الطريقة لحل المشاكل ذات المتغيرين فقط . إن هذه الطريقة غير مفيدة فعلاً في الحياة العملية ، لأن المشاكل العملية تحوي غالباً عدداً كبيراً من المتغيرات ، تكمن فائدتها في إعطاء الدارس معلومات جيدة تساعده على إدراك وحل مشاكل البرمجة الخطية التي تحوي أكثر من متغيرين .

لإيجاد حل برنامج خطي بيانياً يجب أن نتبع الخطوات الآتية :

1 - نرسم المستقيمات الناتجة من تحويل متراجحات القيود إلى متساويات ، ثم نحدد أي جهة من المستقيم تحقق المتراجحة ، فتكون هي نصف المستوي المعرف بالمتراجحة القيد .

2 - نحدد منطقة الحلول الممكنة ، وهي المنطقة الناتجة عن تقاطع أنصاف المستويات المعرفة بمتراجحات القيود . يجب أن تكون هذه المنطقة غير خالية لكي نستطيع متابعة الحل .

3 - نرسم دالة الهدف ، ونحدد جهة تزايده أو تناقصه . وذلك بأن نرسم المستقيم الممثل لدالة الهدف $z = c_1x_1 + c_2x_2$ (عندما يكون z تساوي ثابت ما) فتكون جهة تزايده هي باتجاه الشعاع $\vec{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ ، وبالطبع جهة التناقص هي عكس اتجاه الشعاع $\vec{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$.

4 - نوجد منطقة الحل الأمثل . وذلك بأن نسحب المستقيم $z = c_1x_1 + c_2x_2$ (عندما يكون z ثابت ما) بشكل موازٍ لنفسه باتجاه الشعاع $\vec{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ لإيجاد القيمة العظمى الدالة الهدف (أو بعكس هذا الاتجاه لإيجاد القيمة الأصغرية لهذا التابع) حتى يمر بآخر نقطة من نقاط منطقة الامكانات وأي إزاحة أخرى مهما كانت صغيرة تخرجه منها .

5 - نحسب إحداثيات نقطة الحل الأمثل ونعوضها في دالة الهدف فنحصل على الحل الأمثل لهذه المشكلة.

حالة تطبيقية (1) :

حل بالطريقة البيانية المشكلة الخطية الآتية :

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad Z = 2x_1 + 3x_2 \\ &\text{Subject to} \\ &\quad x_1 + 2x_2 \le 8 \\ &\quad 3x_1 + x_2 \le 6 \\ &\quad x_1 + x_2 \le 4 \\ &\quad (x_1 , x_2) \ge 0 \end{aligned}$$

الحـل :

لحل مثل هذه المشكلة نتبع خطوات حل مشكلة البرمجة الخطية . نرسم المتراجحة الأولى التي تمثل القيد الأول بيانياً وذلك بمكافئتها بمعادلة كما يلي :

متراجحة القيد الأول : $x_1 + 2x_2 \le 8$

المعادلة المكافئة لها : $x_1 + 2x_2 = 8$

نرسم المستقيم $x_1 + 2x_2 = 8$ **وذلك بتحديد نقطتين منه .**

نعوض مثلاً $x_1 = 0$ **في هذه المعادلة فنجد** $x_2 = 4$ **فتكون النقطة** $(0 , 4)$ **هي النقطة الأولى منه .**

نعوض مثلاً $x_2 = 0$ **في هذه المعادلة فنجد** $x_1 = 8$ **فتكون النقطة** $(8,0)$ **هي النقطة الثانية منه .**

نرسم المستقيم المار بالنقطتين $(8,0),(0,4)$**. فيكون هو المستقيم المطلوب.**

إن هذا المستقيم يقسم المستوي إلى نصفين ، ولتحديد النصف المعرَّف بمتراجحة القيد الأول نأخذ نقطة واقعة تحت الخط . مثلاً النقطة $(1,1)$ **ونعوض هذه النقطة في المتراجحة فنجد أن إحداثيات هذه النقطة تحقق المتراجحة . نأخذ نقطة أخرى واقعة فوق المستقيم ، مثلاً النقطة** $(4,4)$ **فنجد أن إحداثياتها لا تحقق المتراجحة . وبالتالي فإن نصف المستوي المعرَّف بالمتراجحة الأولى هو النصف الذي يحوي على النقطة** $(1,1)$ **، وبالطريقة نفسها نحدد أنصاف المستويات المعرفة بالمتراجحات الباقية في قيود المشكلة .**

فيتعين نتيجة تقاطع أنصاف المستويات منطقة الامكانات وهي المضلع ABCD **الموضح بالشكل (2) .**

نرسم دالة الهدف $Z = 2x_1 + 3x_2$ **(من أجل** $Z = 6$ **مثلاً) ثم نسحبه بشكل موازٍ لنفسه باتجاه الشعاع** $\vec{C} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ **فنجد أن آخر نقطة من منطقة الامكانات يغادرها دالة**

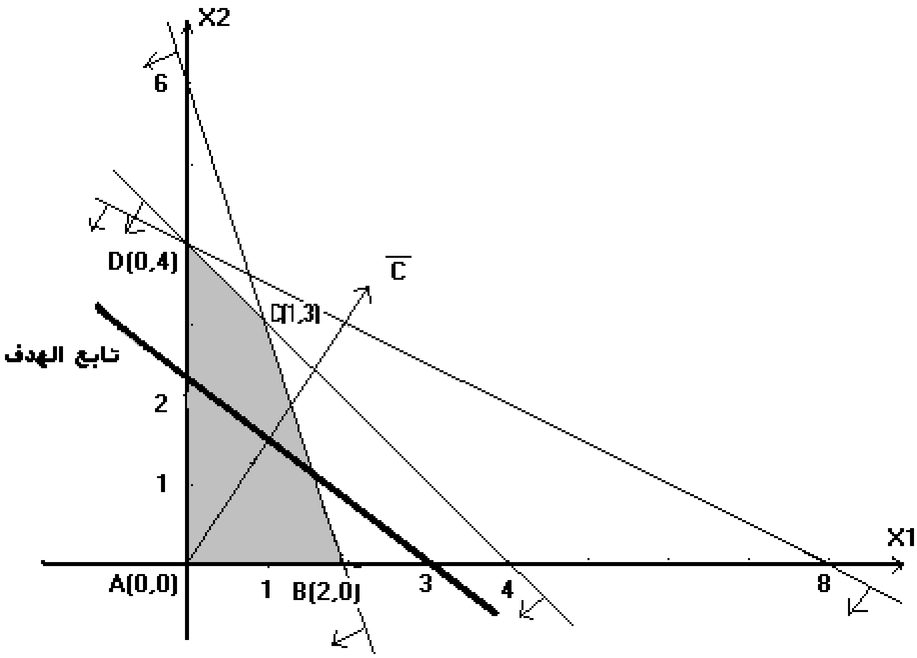
فتكون D هي نقطة الحل الأمثل . يلاحظ أن هذه النقطة ناتجة من تقاطع الهدف هي النقطة المستقيمين

$x_1 = 0 \quad \& \quad x_1 + 2\,x_2 = 8$

بالحل المشترك لهذين المستقيمين نجد :

$x_1 = 0 \quad \& \quad x_2 = 4$

وبالتالي فإن إحداثيات نقطة الحل الأمثل هي D (0 , 4) . نعوض في دالة الهدف فنجد أن $Z^* = \text{Max}\ Z = 12$ **، وهي الحل الأمثل للمشكلة المطروحة.**



الشكل (2)

ملاحظة (1) :

بعد تحديد منطقة الامكانات فإنه يمكن أن نحدد الحل الأمثل لمشكلة برمجة خطية وذلك بحساب قيمة دالة الهدف في زوايا (رؤوس) منطقة الامكانات ثم نعتبر الزاوية التي تعطي التابع أعظم قيمة (أو أصغر قيمة) كنقطة حل أمثل . غير أن هذه الطريقة ليست سهلة التطبيق عندما يكون عدد زوايا (رؤوس) منطقة الامكانات كبير جداً .

في الحالة التطبيقية السابقة ، نجد أن لمنطقة الامكانات الرؤوس ABCD وإحداثياتها هي :

D (0 , 4) , C (1 , 3) , B (2 , 0) , A (0 , 0)

نحسب قيمة التابع في كل منها فنجد :

$$z_A = 2 \times 0 + 3 \times 0 = 0$$
$$z_B = 2 \times 2 + 3 \times 0 = 4$$
$$z_C = 2 \times 1 + 3 \times 3 = 11$$
$$z_D = 2 \times 0 + 3 \times 4 = 12$$

وبالتالي فإن أعظم قيمة لدالة الهدف هي $Z^* = 12$ **ويبلغها في النقطة** $D\ (0\ ,\ 4)$ **كما وجدنا سابقاً .**

حالة تطبيقية 5 :

أوجد بالطريقة البيانية الحل الأمثل للمشكلة التالية :

$$\text{Max}\ \ Z = 4x_1 + x_2$$
$$\text{Subject to}$$
$$x_1 + 3x_2 \le 9$$
$$x_2 \le 4$$
$$x_1 \le 6$$
$$x_1 + x_2 \le 2$$

شروط عدم السلبية $(x_1\ ,\ x_2) \ge 0$

الحل :

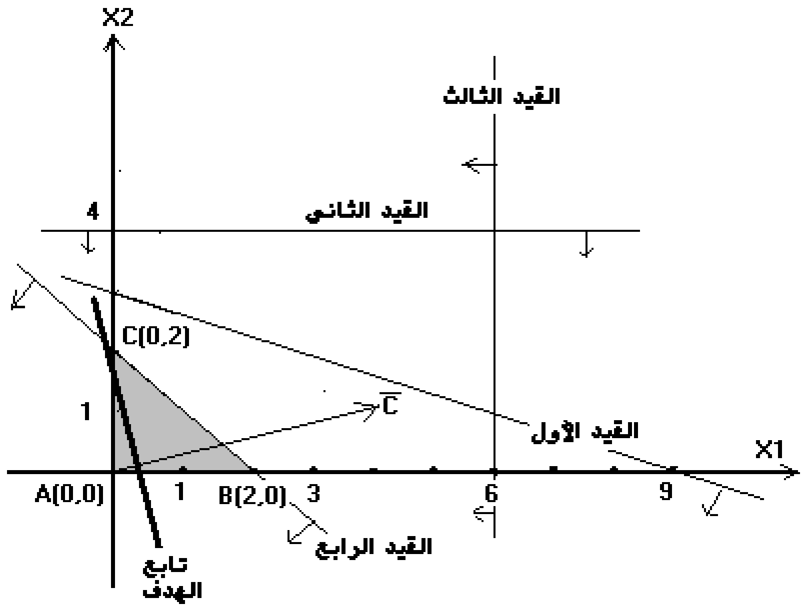
نأخذ المتراجحة الأولى $x_1 + 3x_2 \le 9$ **ونكتب المعادلة المكافئة لها :** $x_1 + 3x_2 = 9$ **نرسم المستقيم** $x_1 + 3x_2 = 9$ **بعد تحديد نقطتين منه . نعوض** $x_1 = 0$ **في معادلة المستقيم فنجد أن** $x_2 = 3$ **فتكون النقطة** $(0\ ,\ 3)$ **هي النقطة الأولى منه . نعوض** $x_2 = 0$ **في معادلة المستقيم فنجد أن** $x_1 = 9$ **فتكون النقطة** $(9,0)$ **هي النقطة الثانية منه . نرسم المستقيم المار من هاتين النقطتين، فيكون هو المستقيم المطلوب .**

يلاحظ أن النقطة $(0,0)$ **تحقق المتراجحة ، فيكون نصف المستوي المعرَّف بالمتراجحة الأولى هو النصف الذي يحوي النقطة** $(0\ ,\ 0)$ **.**

نأخذ المتراجحة الثانية $x_2 \le 4$ **فتكون المعادلة المكافئة لها هي** $x_2 = 4$ **وهو مستقيم موازٍ للمحور** Ox_1 **. ونصف المستوي المعرف بالمتراجحة الثانية هو نصف المستوي الواقع تحت المستقيم** $x_2 = 4$ **.**

أما بالنسبة إلى المتراجحة الثالثة $x_1 \le 6$ **فالمعادلة المكافئة لها هي** $X_1 = 6$ **وهو مستقيم موازٍ للمحور** Ox_2 **. ونصف المستوي المعرف بالمتراجحة الثالثة هو نصف المستوي الواقع على يسار المستقيم** $X_1 = 6$ **. وهكذا بالنسبة لبقية القيود . نحدد منطقة**

الامكانات الناتجة من تقاطع أنصاف المستويات المعرفة بالمتراجحات القيود فنجد أنها محددة بالمضلع ABC كما هو مبين بالشكل (3).



الشكل (3)

نرسم دالة الهدف $4x_1 + x_2 = Z$ من أجل ($Z = 2$) ثم نسحبه باتجاه الشعاع $\vec{C} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ بشكل موازٍ لنفسه فنجد أن آخر نقطة من منطقة الامكانات يغادرها دالة الهدف هي النقطة B من المحور $0x_1$ ، وهي ناتجة من تقاطع مستقيم القيد الرابع مع المحور أي تنتج من تقاطع $x_2 = 0 \quad \& \quad x_1 + x_2 = 2$

وهي B بالحل المشترك نجد إحداثيات النقطة $x_1 = 2 \ , \ x_2 = 0$ أي $B\,(2\,,0)$ هي نقطة الحل الأمثل ، وتكون القيمة العظمى للتابع عندها هي:

$$Z^* = \text{Max } Z = 4 \times 2 + 0 = 8$$

حالة تطبيقية 6 :

أوجد بالطريقة البيانية الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية الآتية :

$$\text{Min } z = 2x_1 + 4x_2$$

Subject to

$$x_1 + 2x_2 \geq 2$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 12$$

$$x_1 + x_2 \geq 6$$

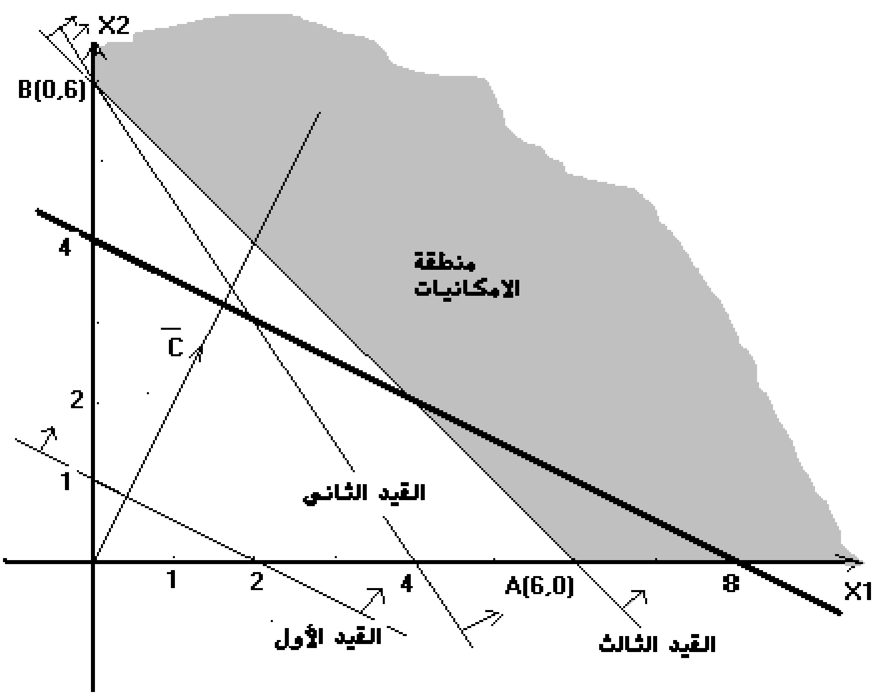
شروط عدم السلبية $(x_1 , x_2) \geq 0$

الحـل :

نحدد منطقة الامكانات بطريقة مشابهة تماماً للتطبيقات السابقة ، فنجد أن هذه المنطقة محددة كما في الشكل (4) . وهي منطقة مفتوحة من اليمين (غير محدودة من اليمين) ،
ثم نرسم دالة الهدف = $z = 2x_1 + 4x_2$ من اجل $z = 16$ نسحبه بشكل موازٍ لنفسه
بعكس اتجاه الشعاع $\overrightarrow{C} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ (لأن المطلوب هو القيمـة الصغرى لدالـة الهدف) . نجد أن آخر نقطة منطقة الامكانات يخرج منها دالـة الهدف هي النقطـة A الناتجة من تقاطع القيد الثالث مع المحور $0x_1$. إحداثيات هذه النقطة هي $A(6, 0)$ ، وبالتالي فإن أصغر قيمة يبلغها التابع في هذه المنطقة هي :

$$z^* = \text{Min } z = 2 \times 6 + 4 \times 0 = 12$$

الشكل (4)



ملاحظة 2 :

إن وجود شرط عدم السلبية في البرنـامج الخطي يعنـي أن منطقـة الامكانـات موجـودة حصراً في الربع الأول من مستوي الإحداثيات .

ملاحظة 3 :

عندما تكون المجاميع في جميـع أطراف القيـود من النـوع (أصغر أو تساوي) ، فإن منطقة الامكانات تكون محصورة بين المحورين وأقرب معادلات القيود للمحورين . وهذا ما

لاحظناه في التطبيقات السابقة التي يطلب فيها حساب القيمة العظمى لدالة الهدف . أما في حال العكس (كما في تطبيقات حساب القيمة الصغرى) فإن منطقة الحل تقع فوق أبعد معادلات القيود على المحورين.

المبحث الرابع

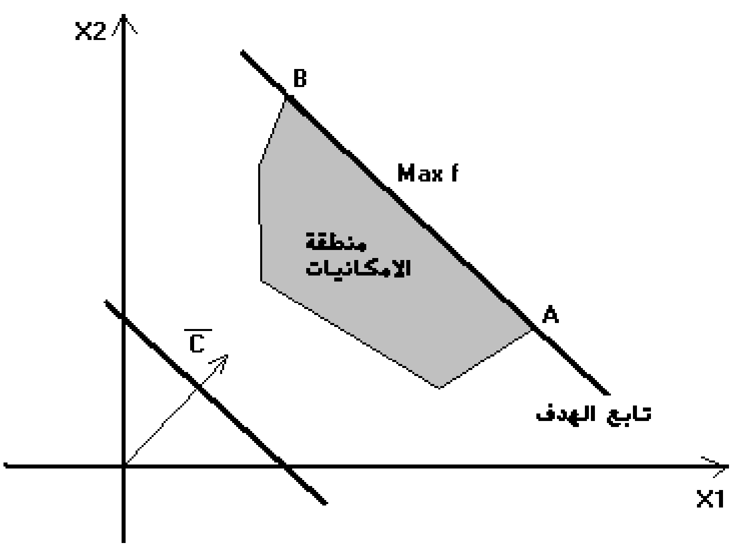
مشكلات ومحددات الطريقة البيانية

لوحظ في التطبيقات السابقة في المبحث السابق أن دالة الهدف تبلغ قيمتها المثلى (العظمى أو الصغرى) في نقطة من منطقة الامكانات المتاحة . ولكن هناك حالات خاصة يجب أخذها بعين الاعتبار وهي كما يلي :

الحالة الأولى :تعدد الحلول المثلى

قد يبلغ دالة الهدف قيمته المثلى في أي نقطة من نقاط قطعة مستقيمة تمثل ضلعاً في منطقة الامكانات . أي أنه قد يكون هناك عدد غير منتهٍ من نقاط الحل الأمثل . انظر الشكل (5).

الشكل(5)



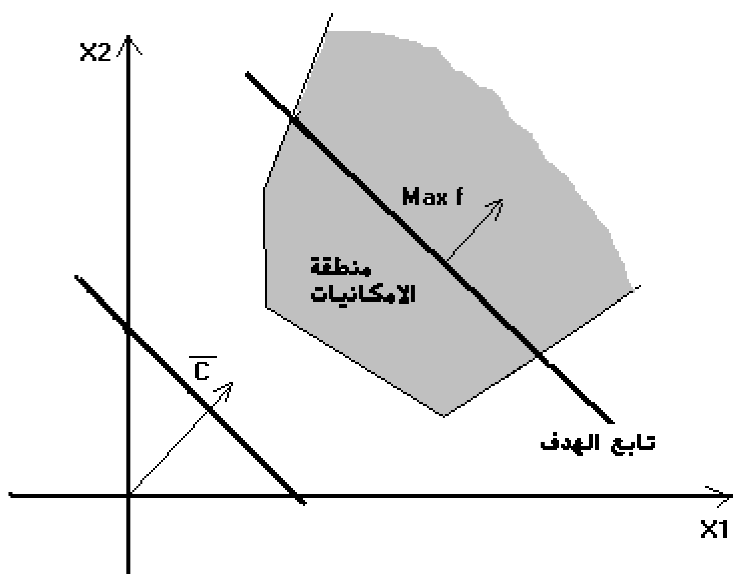
تعدد الحلول المثلى

الحالة الثانية : الحلول غير المحددة

(6) قد تكون دالة الهدف غير محددة من الأعلى في منطقة الامكانات . انظر الشكل

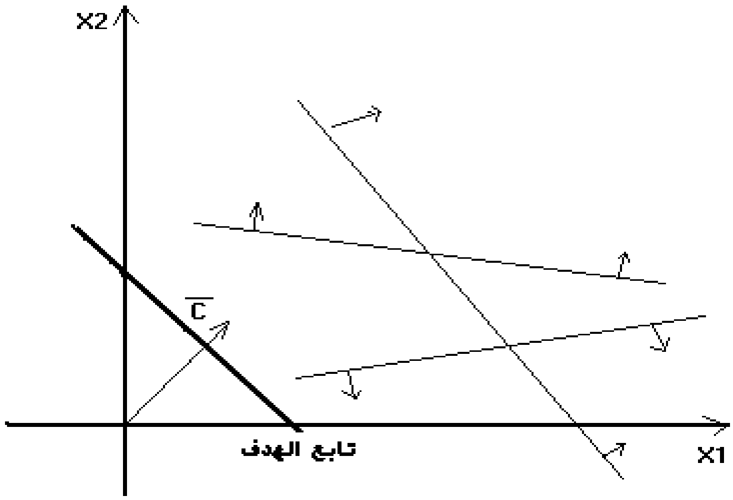
.

الحلول غير المحددة(6) الشكل



الحالة الثالثة : عدم وجود حلول ممكنة

قد تكون جملة الشروط الخطية متناقضة وبالتالي فإن منطقة الامكانات مجموعة خالية .(7). انظر الشكل

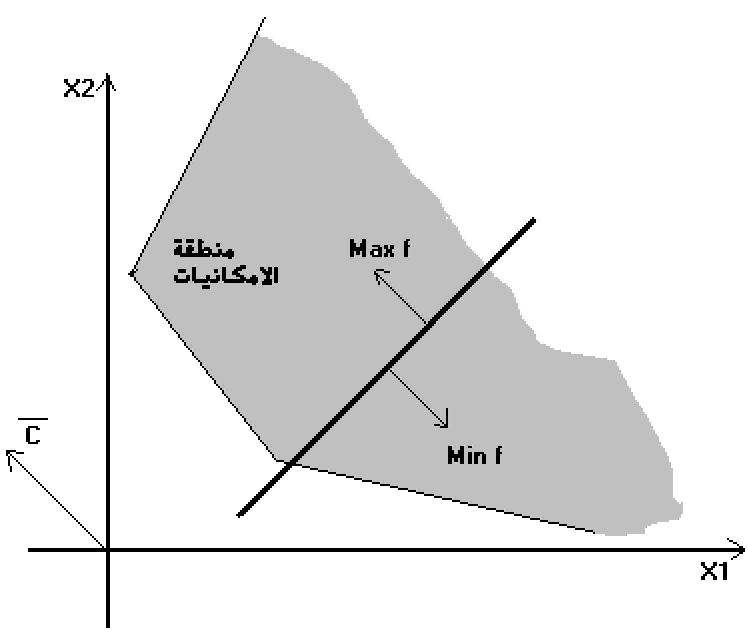


(7)الشكل

الحالة الرابعة :عدم تحديد دالة الهدف

قد يكون دالـة الهـدف غير محدودة من الأعلـى وغيـر محـدودة مـن الأسـفل . انظر الشكل(8) .

$$\text{Min } f(x) \to -\infty$$
$$\text{Min } f(x) \to +\infty$$



(8)الشكل

عدم تحديد دالة الهد

المبحث الخامس
الطريقة الجبرية

Algebric Method

وهي من الطرق الرياضية البحتة التي تعتمد على التعويض الجبري.وترتكز اساساً على تقييم النهايات العظمى التي تم التوصل اليها بموجب الطريقة البيانية.حيث تتبع نفس الخطوات لايجاد منطقة الامكانات المتاحة(منطقة الحل العملي).

يعالج الاسلوب البياني كيفية إيجاد الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية ذات مجهولين . وتبين انه يمكن الوصول إلى الحل الأمثل باستخدام الطريقة البيانية من خلال اختبار القيم المرافقة لكل نهاية عظمى (ذروة) من منطقة الامكانات المتاحة . كما ان نظرية البرمجة الخطية توضح أن الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية الذي يقع على إحدى زوايا او ذروات منطقة الحلول الممكنة يتحقق بحل المعادلات جبرياً (آنياً). إلا أن المشاكل التي تواجهنا في الحياة العملية غالباً ما تحتوي على عدد كبير من المتغيرات والقيود ، مما يجعل إمكانية استخدام الطريقتين البيانية والجبرية لحل هذه المشاكل أمراً متعذراً . لذا كان لابد من البحث عن طريقة أخرى ملائمة لهذا النوع من المشاكل .

7 حالة تطبيقية :

حل بطريقة المعادلات (الطريقة الجبرية) المشكلة الخطية الآتية :

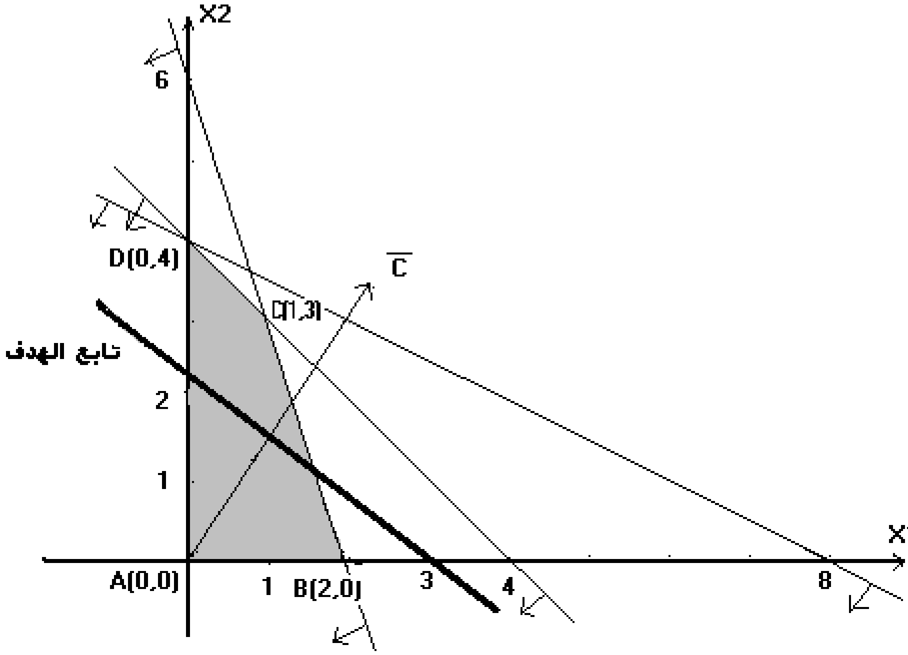
$$\text{Max} \quad Z = 2x_1 + 3x_2$$

Subject to

$$x_1 + 2x_2 \le 8$$
$$3x_1 + x_2 \le 6$$
$$x_1 + x_2 \le 4$$
$$(x_1, x_2) \ge 0$$

الحل :

لحل مثل هذه المشكلة نتبع خطوات حل مشكلة البرمجة الخطية بطريقة الرسم البياني.
وبحل المعادلتين الثانية والثالثة نجد قيم النهاية العظمى لمنطقة الحل الممكن، والتي



تمثلها نقطة تقاطع المستقيمين المذكورين وكذلك بقية النقاط التي يوضحها الجدول التالي.
وبالتعويض بدالة الهدف يتضح الحل الامثل.

دالة الهدف	X2	X1	النقطة
4	**-**	**2**	أ
11	**3**	**1**	ب
12	**4**	**-**	ج

حالة تطبيقية 8 :

حل مشكلة البرمجة الخطية التالية للوصول الى الكلفة الادنى بطريقة المعادلات (الطريقة الجبرية):

Min Z = 2 X1 + 4X2

Subject to

X1 + 2 X2 > 2

3 X1 + 2 X2 >12

X1 + X2 > 6

الحل :

تحول المتراجحات الى معادلات ، ثم يتم رسمها وايجاد منطقة الحل العملي.

وبحل المعادلتين الثانية والثالثة نجد قيم النهاية الصغرى لمنطقة الحل الممكن ، والتي تمثلها نقطة تقاطع المستقيمين المذكورين وكذلك بقية النقاط التي يوضحها الجدول التالي.

وبالتعويض بدالة الهدف يتضح ان النقطة ب تمثل الحد الامثل.

دالة الهدف	X2	X1	النقطة
12	**-**	**6**	أ
24	**6**	**-**	ب

حالات تطبيقية محلولة

حالة تطبيقية 8 :

ينتج أحد المصانع نوعين A_1 , A_2 من المنتوجات ، ربح الواحدة من النوع الأول A_1 دينار . يوجد في هذا المصنع ثلاثة أقسام ، (6) هو A_2 دينار ، ومن النوع الثاني (10)هو عاملاً ، وفي القسم الثالث يعمل (150) عاملاً، وفي القسم الثاني (60)يعمل في القسم الأول

يحتاج إلى ساعات عمل A_2,A_1 عاملاً . إذا علمنا أن إنتاج الواحدة من كل من النوعين (40) (عامل / ساعة) في الأقسام المختلفة كما هو مبين في الجدول التالي :

ساعات العمل اللازمة في القسم الثالث	ساعات العمل اللازمة في القسم الثاني	ساعات العمل اللازمة في القسم الأول	
0	7	10	الواحدة من A_1
8	10	5	الواحدة من A_2

وأن ساعات العمل الأسبوعية للعامل الواحد هي 40.

المطلوب: تنظيم الإنتاج في هذا المصنع بحيث يحقق اعلى ربح .

الحـل :

يلاحظ أن عدد ساعات العمل في القسم الأول هي 2400 = 40 x 60 ساعة عمل أسبوعياً .

يلاحظ أن عدد ساعات العمل في القسم الثاني هي 6000 = 40 x 150 ساعة عمل أسبوعياً .

يلاحظ أن عدد ساعات العمل في القسم الثالث هي 1600 = 40 x 40 ساعة عمل أسبوعياً .

لنفرض أن عدد الوحدات المنتجة من النوع الأول A1 في الأسبوع هو x1 وأن عدد الوحدات المنتجة من النوع الأول A2 في الأسبوع هو x2 ، عندئذ يكون عدد ساعات العمل اللازمة في القسم الأول لانتاج x_1 من المنتج الأول A_1 و x_2 من المنتج الثاني معطى كما يلي :

$$10\,x_1 + 5\,x_2$$

ولكن القسم الأول لا يستطيع أن يقدم أكثر من 2400 ساعة عمل في الأسبوع ، أي :

$$10\,x_1 + 5\,x_2 \le 2400$$

وبشكل مشابه نجد أن عدد ساعات العمل الأسبوعية في القسمين الثاني والثالث اللازمة لانتاج x_1 من المنتوج الأول A_1 و x_2 من المنتوج الثاني A_2 مقيدة بالشرطين التاليين :

$$7\,x_1 + 10\,x_2 \le 6000$$

$$8\,x_2 \le 1600$$

يجب أن يكونا غير سالبين لأنهما يعبران عن عدد الوحدات المنتجة ، x_2 , x_1 كما أن أي :

$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$

أما الربح الذي نحصل عليه عند إنتاج x_2 , x_1 : يعطى بالعلاقة

$$Z = 10\,x_1 + 6\,x_2$$

وبما أننا نسعى لأن يكون الربح أعظمياً ، فإننا نحصل على البرنامج الرياضي الخطي التالي :

$$\begin{aligned}
&\text{Max } Z = 10x_1 + 6x_2 \\
&\text{S.t} \\
&\quad 10\,x_1 + 5\,x_2 \leq 2400 \\
&\quad 7\,x_1 + 10\,x_2 \leq 6000 \\
&\quad 8\,x_2 \leq 1600 \\
&\quad (x_1 , x_2) \geq 0
\end{aligned}$$

والآن ، لنوجد حل هذا البرنامج الخطي بيانياً :

ودالة الهدف الذي ناظمه الشعاع $\vec{C} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}$ **نجد أن D بعد رسم منطقة الامكانات الممثلين (3) و (1) والتي تكون عند تقاطع المستقيمين M نقطة الحل الأمثل هي للمعادلتين :**

$$10\,x_1 + 5\,x_2 = 2400$$

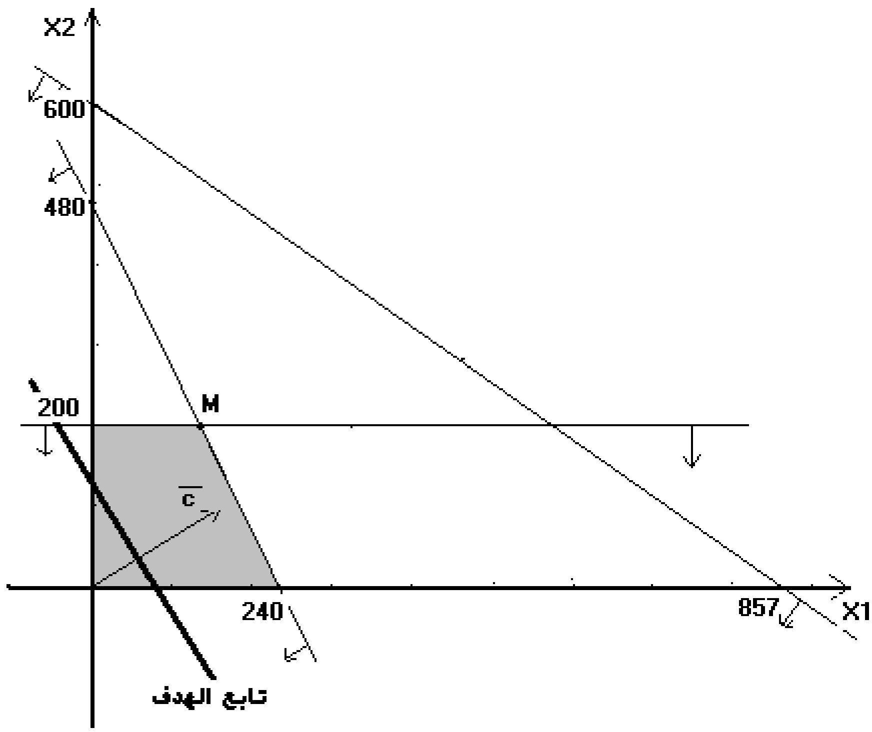
$$8\,x_2 = 1600$$

بالحل المشترك لهاتين المعادلتين نجد :

$x_2 = 200 \quad , \quad x_1 = 140$

بالتعويض في دالة الهدف ، نجد أن الربح الأعظمي

مساوياً لـ $Z^* = Max\ Z = 2600$ دينار.



الشكل (9)

حالة تطبيقية 9 :

يمكن لأحد المصانع أن ينتج ثلاثة أنواع من المنتجات A_1 , A_2 , A_3 وذلك باستخدام مادتين أوليتين B_1, B_2 . يتوفر من المادة الأولية B_1 الكمية (20) ، ومن المادة الثانية B_2 يتوفر (30) . إذا كان إنتاج الواحدة من A_1 يتطلب استخدام الكمية (2) من B_1 والكمية (4) من B_2 . أما إنتاج الواحدة من A_3 فيتطلب استخدام الكمية (2) من B_1 والكمية (3) من B_2 .

والمطلوب : تنظيم عملية الإنتاج هذه علماً أن :

أ – ربح الواحدة من المنتوجات A_3 , A_2 , A_1 هو بالترتيب $2 , 1 , 3$.

ب – المصنع ملزم بإنتاج (7) وحدات على الأقل من النوع A_1.

الحل : بفرض x_1 عدد الوحدات المنتجة من النوع A_1 . وبفرض x_2 عدد الوحدات المنتجة من النوع A_2 . وبفرض x_3 عدد الوحدات المنتجة من النوع A_3 . عندئذ ، سنكون أمام البرنامج الخطي التالي :

$$\text{Max } Z = 3x_1 + x_2 + 2x_3$$
S.t.
$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 20$$
$$4x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30$$
$$x_1 \geq 7$$
$$(x_1, x_2, x_3) \geq 0$$

حالة تطبيقية 10 :

أوجد بالطريقة البيانية حل البرنامج الخطي التالي :

$$\text{Min } z = 5x_1 + 2x_2$$
S.t.
$$x_1 + 2x_2 \geq 5$$
$$2x_1 - x_2 \geq 12$$
$$x_1 + 3x_2 \geq 4$$
$$x_1 \geq 0$$

الحل :

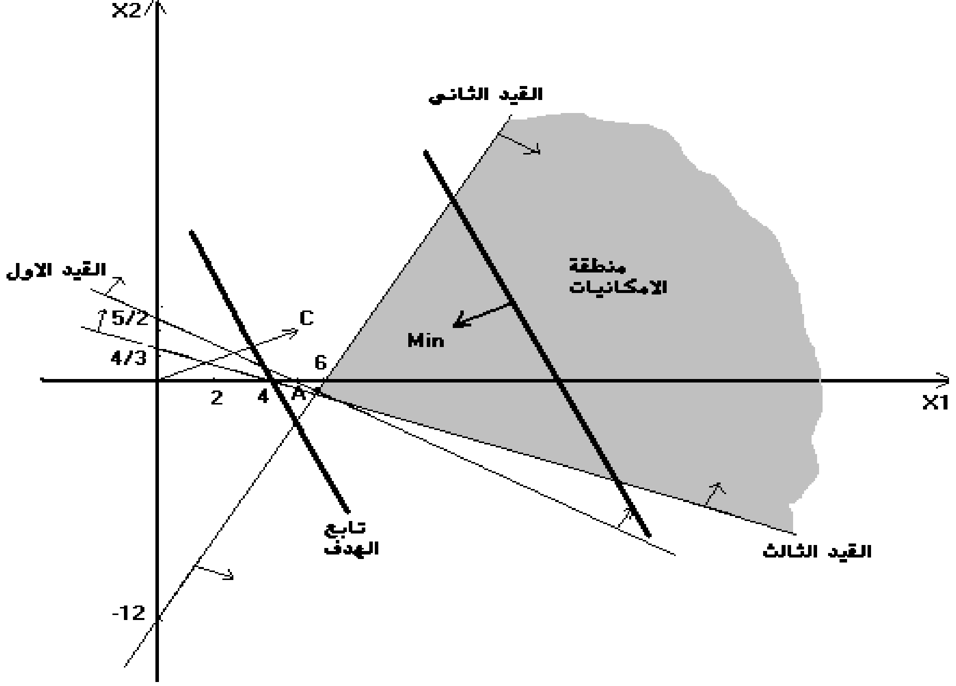
والذي ناظمه الشعاع $\vec{C} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ **يلاحظ** z **ودالة الهدف** D**بعد رسم منطقة الامكانات المقابلين للمعادلتين (2) و(1) وهي تقاطع المستقيمين** A**أن نقطة الحل الأمثل هي النقطة :**

$$x_1 + 2x_2 = 5$$
$$2x_1 - x_2 = 12$$

بالحل المشترك لهاتين المعادلتين نجد :

$$x_2 = -\frac{2}{5} \quad , \quad x_1 = \frac{29}{5}$$

بالتعويض في دالة الهدف نجد أن القيمة الصغرى له هي : $z^* = \frac{141}{5}$



الشكل (10)

تمارين

1 - تنتج منظمة ثلاثة أنواع من المنتجات m_1 , m_2 , m_3 **وذلك باستخدام المواد الأولية** A , B , C **. وعلى اعتبار أن المواد الأولية محدودة ، فإن إدارة المنظمة قررت تخصيص عدد من وحدات المواد الأولية لانتاج وحدة ما . الجدول التالي يبين ذلك التخصيص ، بالإضافة إلى ربح كل وحدة من المنتجات :**

المواد الأولية المنتج	A	B	C	ربح الوحدة الواحدة
m_1	4	9	10	8
m_2	3	8	12	6
m_3	6	18	15	12
كمية المواد المتاحة	96	126	150	

المطلوب :

أوجد النموذج الرياضي الذي يحقق أعظم ربح ممكن لهذه المشكلة .

ساعة من الوقت يستغلها في صنع 28 وحدات من الخشب و 6يمتلك أحد مصنعي الأثاث شاشات ديكور . وقد باع نوعين منها في الماضي ، لذلك فإنه سيقيد نفسه بهما . ويقدر أن ساعات ، بينما يحتاج النوع الثاني وحدة 7النوع الأول يحتاج إلى وحدتين من الخشب و ليرة على التوالي . 80 ليرة و 120 ساعات . وتقدر أثمان النوعين بـ 8واحدة من الخشب و كم عدد شاشات الديكور من كل نوع يجب أن يقوم بتصنيعها إذا أراد أن يحصل على أكبرعائد من المبيعات .

تقوم إحدى شركات صناعة الأدوات المنزلية الكهربائية بانتاج ثلاثة أنواع من . يبلغ ربح الوحدة من كل منتج وعلى التوالي، 45 C , B , Aالمنتجات ،170، 210 دينار . تمر كل وحدة من هذه المنتجات بثلاث مراحل إنتاجية هي التصنيع والتجميع ومن ثم الفحص والاختبار . وفيما يلي عدد الساعات التي يحتاجه إنتاج كل وحدة من هذه المنتجات في الأقسام الثلاثة :

عدد الساعات التي تحتاجها كل وحدة

الاختبار	التجميع	التصنيع	المنتج
1	**3**	**3**	A
¾	**2**	**4**	B
½	½	**1**	C

فإذا علمت أن عدد ساعات العمل الأسبوعية المتوفرة في الأقسام الثلاثة وعلى التوالي هي 200 , 350 , 400 **والذي** **فالمطلوب : اكتب النموذج الرياضي الممثل لهذه المشكلة** **يعطي أكبر ربح ممكن .**

2 - في مزرعة تعاونية أرض زراعية مساحتها (50) **دونماً ، وفيها من المزارعين ما يكفي** (1000) **ساعة عمل . وخصص لهذه الأرض مبلغ** 15000 **دينار ، ويمكن زراعة هذه الأرض بالفاصولياء والبندورة والقمح . إذا كانت الكلفة (بالمال و بساعات العمل) لزراعة الدونم الواحد من هذه الأرض والربح الصافي من منتوج الدونم الواحد عندما يكون كل من هذه المزروعات معطاة بالجدول التالي :**

المطلوب :

أوجد النموذج الرياضي الذي يعطي أفضل استخدام لهذه الأرض .

الربح الصافي دينار	ساعات العمل اللازمة	الكلفة دينار	
400	25	300	**فاصولياء**
800	40	400	**بندورة**
300	15	200	**قمح**

3 - يحتاج فريق سباحة 400 **متر تتابع إلى أربعة سباحين ، يسبح كل منهم** 100 **متر ظهر ، وصدر و فراشة و حرة . يتوفر لدى المدرب ستة سباحين يسبحون بأزمنة متوقعة (بالثواني) منفردين كما في الجدول التالي :**

سباحة 4منفردة حرة	سباحة 3منفردة فراشة	سباحة 2منفردة صدر	سباحة 1منفردة ظهر	

57	63	73	65	السباح الأول
58	65	70	67	السباح الثاني
55	69	72	68	السباح الثالث
59	70	75	67	السباح الرابع
57	75	69	71	السباح الخامس
59	66	71	69	السباح السادس

كيف يمكن للمدرب تعيين أربعة سباحين للسباق لتصغير مجموع زمن السباق؟. اكتب النموذج الرياضي لهذه المشكلة فقط (دون حل).

4 - أوجد بالطريقة البيانية حل البرنـامج الخطي التالي :

$$\text{Max } Z = 2x_1 + x_2$$

S.t.

$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 &\le 6 \\ x_1 + x_2 &\le 3 \\ 5x_1 - 2x_2 &\le 10 \\ (x_1, x_2) &\ge 0 \end{aligned}$$

5 - أوجد بالطريقة البيانية حل البرنـامج الخطي التالي :

$$\text{Min } z = -3x_1 + x_2$$

S.t.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &\ge -6 \\ -x_1 - x_2 &\ge -3 \\ -5x_1 + 2x_2 &\ge -10 \\ (x_1, x_2) &\ge 0 \end{aligned}$$

6 - بيّن بالطريقة البيانية أن البرنـامج الخطي التالي ليس له حل :

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 3x_2$$

S.t.

$$\begin{aligned} -3x_1 + 4x_2 &\le 6 \\ -2x_2 &\le -7 \\ x_1 + x_2 &\le 3 \\ -2x_1 + x_2 &\le -1 \\ (x_1, x_2) &\ge 0 \end{aligned}$$

7 - بين بالطريقة البيانية أن البرنامج الخطي المذكور في المشكلة السابقة تكون له حلول تعطي لدالة الهدف قيماً غير محدودة إذا بدلت المتراجحة :

$x_1 + x_2 \le 3$

بالمتراجحة المعاكسة : $x_1 + x_2 \ge 3$

8 - بيّن بالطريقة البيانية أن نفس البرنامج الخطي الموضح في المشكلة السادسة (أي بعد تعديل الشروط الخطية للمشكلة الثامنة) له حل إذا كان دالة الهدف معطى بالشكل :

$$\text{Max}Z = -x_1 + x_2$$

9 - أوجد حل كل من البرامج الخطية الآتية بالطريقة البيانية :

a) $\text{Max } Z = -5x_1 + 6x_2$

S.t.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 &\ge -5 \\ 5x_1 - 3x_2 &\le 3 \\ x_1 + 2x_2 &\le 6 \\ (x_1, x_2) &\ge 0 \end{aligned}$$

b) $\text{Max } Z = x_1 - 3x_2$

S.t.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 &\le -3 \\ x_1 - 3x_2 &\le -4 \\ x_1 + x_2 &\ge 3 \\ (x_1, x_2) &\ge 0 \end{aligned}$$

c) $\text{Max } Z = 10x_1 + 5x_2$

S.t.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 9x_2 &\le 27 \\ 8x_1 + 6x_2 &\le 48 \\ -4x_1 + 6x_2 &\ge -12 \\ 8x_1 + 12x_2 &= 24 \\ (x_1, x_2) &\ge 0 \end{aligned}$$

10 - لديك البرنامج الخطي التالي :

$$\text{Max } Z = \alpha x_1 + \beta x_2$$
S.t.
$$3x_1 - 4x_2 \leq -12$$
$$-2x_1 - x_2 \leq -10$$
$$x_1 + x_2 \geq 2$$
$$-x_1 - x_2 \leq -7$$
$$(x_1 , x_2) \geq 0$$

حيث $\alpha \in R$, $\beta \in R$ **هما وسيطان للبرنامج .**

ناقش بالطريقة البيانية حلول هذا البرنامج واوجد القيم المختلفة لهذين الوسيطين.

الفصل الثالث

الطريقة المبسّطة

The Simplex Method

يتنـاول هذا الفصـل الطريقـة الجبريـة التـي تعتمـد علـى جبـر المصـفوفات لحـل مشـاكل البرمجـة الخطية وتدعى الطريقة المبسطة (The Simplex Method) . تعمل هذه الطريقـة بشـكل مشابه تماماً للطريقة البيانيـة في كيفيـة الوصول للحل الأمثل ، حيث تقوم هذه الطريقـة بفحص ذروات منطقـة الامكانـات بشـكل متسلسل وباستخدام مفـاهيم رياضيـة بسيطة . ويـتم ذلك بشكل متكرر ، وهذا يعني إعادة نفس الإجراءات مرة تلو الأخرى ولحين الوصـول للحل الأمثل .

عندما يكـون عدد المتغيرات كبيراً فـي مشكلة البرمجـة الخطيـة ، لايمكـن رسم منطقـة الامكانـات، ولكـن هـذا لا يمنـع حقيقـة أن الحـل الأمثـل لا زال يقـع علـى إحـدى ذروات منطقـة الامكانات الممثلة بشكل ذي جوانب وأبعاد متعددة.

حالة تطبيقية 11 :

أوجد الحل الأمثل للمشكلة الآتية :

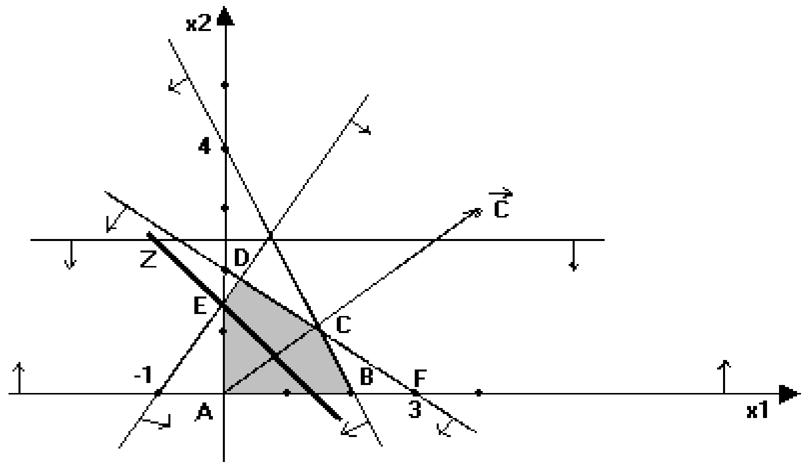
$$\text{Max } Z = 4x_1 + 3x_2$$

S.t.

$$\begin{array}{rlr}
2x_1 + 3x_2 & \le 6 & (1) \\
-3x_1 + 2x_2 & \le 3 & (2) \\
2x_2 & \le 5 & (3) \\
2x_1 + x_2 & \le 4 & (4) \\
(x_1 , x_2) & \ge 0 & (5)
\end{array}$$

الحـل :

نرسم منطقة الامكانات ، نرسم دالة الهدف ونبحث عن النقطـة التـي تعطيـه أكبر قيمـة ممكنـة .



(1)الشكل

يلاحظ أن نقطة الحل الأمثل هي C: ناتجة عن تقاطع المستقيمين

$$2x_1 + 3x_2 = 6$$

$$2x_1 + x_2 = 4$$

بالحل المشترك لهاتين المعادلتين نجد أن :

$$x_1 = \frac{3}{2} \quad , \quad x_2 = 1$$

والقيمة العظمى لدالة الهدف هي :

$$Z^* = 4 \times \frac{3}{2} + 3 \times 1 = 9$$

المبحث الاول

إيجاد الحل وفق الطريقة المبسطة

لاستخدام الطريقة المبسطة ، فإنـه يجب ترتيب مصفوفة الحل الأولـي ، وذلـك بتحويـل القيـود (المتراجحـات) إلـى معـادلات . أي تحويـل البرنـامج الخطـي إلـى الصيغة النموذجيـة . وذلـك لأن هـذه الطريقـة مـا هـي إلا عبـارة عن طريقـة جبريـة يجـب أن تكـون كـل العلاقـات

الرياضية مرتبة بشكل معادلات تحتوي على كل المجاهيل ، ثم نقوم بعد ذلك بإيجاد الحل الجبري الأولي .

أ – تحويل القيود (المتراجحات) إلى معادلات :

لهذه القيود . حيث يمثل مجهول (Slack Variable)يتم ذلك بإضافة متغيرات فروق
الفرق في كل قيد مصادر غير مستخدمة . بالعودة للحالة التطبيقية (11) نفرض أن S_i هو
فإن القيود السابقة تصبح بالشكل التالي :1مجهول الفرق في القيد

$$2x_1 + 3x_2 + S_1 = 6 \qquad (1)$$
$$-3x_1 + 2x_2 + S_2 = 3 \qquad (2)$$
$$2x_2 + S_3 = 5 \qquad (3)$$
$$2x_1 + x_2 + S_4 = 4 \qquad (4)$$
$$(x_1, x_2, S_1, S_2, S_3\, S_4) \geq 0 \qquad (5)$$

أما دالة الهدف فأنها يصبح على الشكل الآتي :

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 3x_2 + 0 \,.\, S_1 + 0 \,.\, S_2 + 0 \,.\, S_3 + 0 \,.\, S_4$$

وذلك لأن الربح المقابل لمجهول الفرق يساوي الصفر (لأن مجهول الفرق عبارة عن مصادر غير مستخدمة) .

بناءً على ما تقدم وبافتراض حالة اللا إنتاج (أي عدم إنتاج أي شيء) فإن هذا يعني $x_1 = 0$ و $x_2 = 0$. عدم استخدام الموارد المتاحة ، وأن

وتكون الموارد غير المستخدمة هي :

$S_4 = 4 \quad , \quad S_3 = 5 \quad , \quad S_2 = 3 \quad , \quad S_1 = 6$

ب - إيجاد الحل الجبري الأولي :

بالنظر إلى القيود بعد تحويلها إلى معادلات بإضافة مجاهيل الفروق ، نجد أن هناك أربع معادلات بستة مجاهيل $(x_1 , x_2 , S_1 , S_2 , S_3 , S_4)$. يمكن إيجاد حل لهذه المشكلة باعطاء قيماً كيفية لاثنين من المجاهيل ثم حل المعادلات الأربع لإيجاد قيم المجاهيل الأخرى . وهذا واضح في الطريقة البيانية ، حيث كل ذروة في منطقة الامكانات تقابل حالة يكون فيها اثنان من المجاهيل مساويين للصفر . فمثلاً ، لو تم أخذ $x_1 = 0$ و $x_2 = 0$ فإن هذا الحل يقابل النقطة A (ذروة) في منطقة الامكانات ، وتكون من أجله قيم المتغيرات الأخرى غير مساوية للصفر . كما أن كل ذروة في منطقة الامكانات يمكن التعبير عنها بحل يكون فيه اثنان من المجاهيل مساويين للصفر .

النقطة B: تقابل الحل

$S_4 = 0 \ , \ S_3 = 5 \ , \ S_2 = 9 \ , \ S_1 = 2 \ , \ x_2 = 0 \ , \ x_1 = 2$

النقطة C: تقابل الحل

$S_4 = 0 \ , \ S_3 = 3 \ , \ S_2 = 11/2 \ , \ S_1 = 0 \ , \ x_2 = 1 \ , \ x_1 = 3/2$

النقطة D: تقابل الحل

$S_4 = 22/13 \ , \ S_3 = 17/13 \ , \ S_2 = 0 \ , \ S_1 = 0 \ , \ x_2 = 24/13 \ , \ x_1 = 3/13$

النقطة E: تقابل الحل

$S_4 = 5/2 \ , \ S_3 = 2 \ , \ S_2 = 0 \ , \ S_1 = 3/2 \ , \ x_2 = 3/2 \ , \ x_1 = 0$

تبدأ الطريقة المبسطة بحل أولي ممكن ، والذي تكون فيه كل المجاهيل الحقيقية x_1 و x_2 مساوية للصفر . وشيء بديهي أن يعطي هذا الحل ربحاً مقداره صفراً . هذا الحل ليس حلاً مثالياً ، ولكنه يمثل ذروة في منطقة الامكانات ، وهي النقطة A.

إن الطريقة المبسطة تأخذ بعين الاعتبار الحل الممكن فقط ، وبالتالي فهي تأخذ ذروات منطقة الامكانات ، وتبدأ بالذروة $A (0 , 0)$ وتتحرك نحو الذروات الأخرى حتى تصل إلى الحل الأمثل .

لتسهيل التعامل مع المعادلات ودالة الهدف ، فإننا نرتبها في الجدول التالي :

		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	R.S.
سطر دالة الهدف Z	1	-4	-3	0	0	0	0	0

سطر S_1	S_1	0	2	3	1	0	0	0	6
سطر S_2	S_2	0	-3	2	0	1	0	0	3
سطر S_3	S_3	0	0	2	0	0	1	0	5
سطر S_4	S_4	0	2	1	0	0	0	1	4

الجدول (1)

يلاحظ أنه تم كتابة دالة الهدف بالشكل التالي :

$$Z - 4x_1 - 3x_2 - 0 \,.\, S_1 - 0 \,.\, S_2 - 0 \,.\, S_3 - 0 \,.\, S_4 = 0$$

إن العناصر الموجودة في السطر الأول (سطر S_1) هي معاملات القيد الأول، أما العناصر الموجودة في السطر الثاني (سطر S_2) هي معاملات القيد الثاني ، وهكذا ... أما العمود الأخير في هذا الجدول يشكل الطرف الأيمن في معاملات القيود ودالة الهدف .

أن الطريقة المبسطة تبدأ من نقطة الأصل (المبدأ) ، حيث تكون المجاهيل الحقيقية ($x_1 = x_2 = 0$) مساوية للصفر مما يؤدي إلى عدم وجودها في عمود الحل . كما أن المجاهيل غير الحقيقية (مجاهيل الفروق) موجودة في عمود الحل $S_4 = 4$, $S_3 = 5$, $S_2 = 3$, $S_1 = 6$. وهذا يدعى بالحل الأساسي الممكن . ويمكن كتابته بشكل شعاعي كما يلي :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ملاحظات على هذا الحل :

1) **تسمى المتغيرات المكونة للحل بالمتغيرات الأساسية أو متغيرات القاعدة، في المثال الحالي متغيرات القاعدة هي (S_4 , S_3 , S_2 , S_1). وتسمى المتغيرات غير الداخلة في الحل بالمتغيرات غير الأساسية أو متغيرات خارج القاعدة ، في المثال الحالي متغيرات خارج القاعدة هي (x_2 , x_1) .**
2) **إن كل متغير يظهر في عمود الحل يجب أن تكون قيمته واحداً . وتظهر هذه القيمة عند نقطة التقاطع بين عمود وسطر المتغير المذكور ، وقيماً صفرية في الأماكن الأخرى من العمود . ويكون هذا الكلام صحيحاً عندما تكون جميع القيود بشكل متراجحات LE أصغر أو تساوي ، وجميع قيم الطرف الأيمن غير سالبة .**

أما الحالات الأخرى (القيود متراجحات GE أكبر أو تساوي ، أو الطرف الأيمن سالب) سوف تناقش فيما بعد .

3) من الواضح أن الربح الناجم عن هذا الحل هو صفر ، وهو حل غير مثالي . ومن الواضح أيضاً أننا نستطيع زيادة الربح بمقدار 4 لو تمَّ إعطاء المتغير x_1 القيمة واحد ، ونستطيع زيادته بمقدار 3 إذا أعطي x_2 القيمة 1 ، وهكذا .

4) إن وجود رقم موجب في صف دالة الهدف ينبئنا بأن الربح سوف يتناقص إذا أضفنا المتغير المرتبط به إلى الحل .

5) نصل إلى الحل الأمثل بالطريقة المبسّطة عندما تكون جميع عناصر سطر دالة الهدف موجبة أو مساوية للصفر .

المبحث الثاني

خطوات الطريقة المبسطة

بعد الانتهاء من الجدول الأول الممثل للحل الأولي ، يجب إتباع مجموعة من الخطوات بهدف إيجاد القيم المطلوبة للجدول الجديد . وبالرغم من أن حساب هذه القيم ليس صعباً بحد ذاته، ولكن حدوث أي خطأ فيه قد يؤدي إلى الوصول إلى نتائج خاطئة .

1 - تحديد المتغير الداخل :

يتم من خلال اختيار المتغير غير الأساسي ، أي المتغير غير الداخل في الحل الحالي ، والذي يمكن بواسطته تحسين الحل الموجود بأكبر قدر ممكن . وهذا يعني تحديد العمود الذي يحوي العنصر الأكثر سلبية في سطر دالة الهدف. ويسمى هذا العمود بعمود الارتكاز أو العمود المحوري .

تمتلك معاملات سالبة في سطر دالة الهدف ، x_1 , x_2 يلاحظ في المثال ، أن كلاً من
هو x_1 هو متغير داخل إلى الحل وعمود x_1 ، لذلك نعتبر أن المتغير x_1 والأكثر سلبية هو
عمود الارتكاز أو العمود المحوري .

2 - تحديد المتغير الأساسي الخارج :

يتم ذلك من خلال اختيار المتغير الأساسي الذي يصل إلى الصفر أولاً ، أي الذي ترافقه أقل كمية موجبة ، وهذه الكمية هي ناتج قسمة عناصر الطرف الثاني على عناصر عمود
هو المتغير الداخل) x_1 (حيث x_1 الارتكاز من أجل جميع القيود التي تتقاطع مع المحور
بالاتجاه غير السالب . القيد الذي يعطي التقاطع الأول يعرّف المتغير الخارج .

يتقاطع مع الجزء (4) و (1) في المثال السابق ومن الشكل يلاحظ أن كلاً من القيدين
. أما x_1 مع الجزء السالب من المحور (2) ، بينما يتقاطع القيد x_1 غير السالب مع المحور
. هذه النتيجة يمكن قراءتها مباشرة من الجدول حيث تكون x_1 فهو موازٍ للمحور (3) القيد
وتكون معاملات (2,2) هي معاملات موجبة x_1 معاملات القيدين الأول والرابع في عمود
(3 - , 0) مساوية (3) و (2) القيدين

وبذلك نستنتج انه إذا كان القيد يمتلك معاملاً سالباً أو صفراً في عمود العنصر الداخل فإن هذا القيد لا يتقاطع مع الجزء غير السالب من المحور المعرف للعنصر الداخل ، وبالتالي لن يكون له تأثير في إمكانية الحل .

، x_1 يتقاطعان مع الجزء غير السالب من المحور (1), (4) في الشكل ، نجد أن القيدين
هو الأصغر ، ومنه AB وتقاطعهما معطياً بـ $AB=\frac{4}{2}=2$, $AF=\frac{6}{2}=3$. وبالتالي فإن

) يصبح (4) (المقابل للقيد B في الذروة S_4 . وبما أن المتغير$AB = 2$ هي x_1نجد أن قيمة مساوٍ للصفر ، فإنه سيكون المتغير الخارج . يسمى السطر الذي يخرج المتغير المرتبط به بسطر الارتكاز أو السطر المحوري. و نسمي العنصر الذي يمثل تقاطع العمود المحوري مع السطر المحوري بالعنصر المحوري أو عنصر الدوران .

3 - حساب القيم الجديدة للسطر المحوري الجديد :

حسب طريقة غوص – جوردان ، فإنه يتم ذلك من خلال قسمة كل عنصر في السطر المحوري القديم على العنصر المحوري (عنصر الدوران) ، وهو نقطة تقاطع السطر في عمود (1)المحوري مع العمود المحوري. وهذه الخطوة تساعدنا على إيجاد الرقم المتغير الذي دخل الحل . وبالتطبيق علىالمثال السابق نجد :

		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	R.S.
Z								
S_1								
S_2								
S_3								
x_1	0	1	1/2	0	0	0	1/2	2

4- حساب الحل الممكن الجديد :

وذلك بحساب القيم الجديدة للأسطر الأخرى حسب طريقة غوص – جوردان :

أ. لحساب سطر الدالة الهدف الجديد :

(وهو العنصر الموجود في العمود 4– نضرب السطر المحوري الجديد بـ المحوري وفي سطر الدالة الهدف) ثم نطرح الناتج من سطر تابع الهدف القديم .

	1	-4	-3	0	0	0	0	0
_	0	-4	-2	0	0	0	-2	-8
	1	0	-1	0	0	0	2	8

ب. لحساب سطر S1: الجديد

(العنصر الموجود في العمود المحوري وسطر 2نضرب السطر المحوري الجديد بـ S_1) ثم نطرح الناتج من سطر S_1.

	0	2	3	1	0	0	0	6
_	0	2	1	0	0	0	1	4

0	0	2	1	0	0	-1	2

ج. لحساب سطر S_2 الجديد :

.S2 ونطرح الناتج من سطر 3-نضرب السطر المحوري الجديد بـ

	0	-3	2	0	1	0	0	3
	0	-3	-3/2	0	0	0	-3/2	-6
	0	0	7/2	0	1	0	3/2	9

الجديد :S_3د . لحساب سطر

.S_3 ونطرح الناتج من سطر 0نضرب السطر المحوري الجديد بـ

	0	0	2	0	0	1	0	5
_	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	2	0	0	1	0	5

فنحصل على الجدول الممثل للحل الجديد كما يلي :

		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	R.S.
Z	1	0	-1	0	0	0	2	8
S_1	0	0	2	1	0	0	-1	2
S_2	0	0	7/2	0	1	0	3/2	9
S_3	0	0	2	0	0	1	0	5
x_1	0	1	1/2	0	0	0	1/2	2

الجدول (2)

وهذا يعني أن الحل الجديد هو :

$S_4 = x_2 = 0$, $S_3 = 5$, $S_2 = 9$, $S_1 = 2$, $x_1 = 2$

وقيمة دالة الهدف الموافقة لهذا الحل هي $Z = 8$. وهذه ما هي إلا النقطة B في الرسم البياني .

هـ . اختبار الحل الأمثل :

إذا كانت جميع العناصر في سطر دالة الهدف موجبة أو صفراً ، فإن هذا يعني أنا وصلنا إلى الحل الأمثل . أما إذا لم يكن كذلك ، فنعود للخطوة الأولى، وهكذا حتى نصل إلى الحل الأمثل .

، يلاحظ أنه مازال هناك متغير غير أساسي يمتلك معاملاً سالباً (2) ومن خلال الجدول) . إذاً لا زالت هناك إمكانية لتحسين الحل ، لأن الحل الناتج x_2في سطر دالة الهدف (وهو لا يمثل حلاً مثالياً .(2)في الجدول

هو العمود المحوري. كما أن العنصر x_2 ، وبالتالي فإن عمود x_2إن العنصر الداخل هو على المعاملات R.S ، لأننا إذا تم احتساب النسب الناتجة من تقسيم العمود S_1الخارج هو . وبالتالي فإن S_1الموجبة من العمود المحوري ، نجد أن أصغر نسبة هي المقابلة للعنصر هو عنصر الدوران .2 ، وأن العنصر S_1السطر المحوري هو سطر

بإعادة خطوات الحساب السابقة نجد الجدول التالي :

		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	R.S.
Z	1	0	0	1/2	0	0	3/2	9
x_2	0	0	1	1/2	0	0	-1/2	1
S_2	0	0	0	-7/4	1	0	13/4	11/2
S_3	0	0	0	-1	0	1	1	3
x_1	0	1	0	-1/4	0	0	3/4	3/2

)3الجدول (

يلاحظ أن هذا الجدول يمثل جدول الحل الأمثل ، لأن جميع معاملات سطر دالة الهدف موجبة أو مساوية للصفر ، وبالتالي لا توجد إمكانية لتحسين الحل .

والحل هو :

$S_1 = S_4 = 0$, $S_3 = 3$, $S_2 = 11/2$, $x_2 = 1$, $x_1 = 3/2$

والقيمة العظمى للتابع هي : $Z^* = 9$ ، وهو الحل نفسه الذي حصلنا عليه بالطريقة البيانية.

ملاحظة 1 :

من هذا المثال يلاحظ المرور بثلاث نقاط تمثل ذروات من منطقة الامكانات حتى الوصول للحل الأمثل . إذاً ، ليس من الضروري أن يتم الحساب عند نقاط الذروات الخمس الموجودة . وهذا ما يبين ميزة من ميزات الطريقة المبسطة .

حالة تطبيقية 12 : لديك البرنامج الخطي التالي :

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

S.t.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 430$$
$$3x_1 + 2x_3 \le 460$$
$$x_1 + 4x_2 \le 420$$
$$(x_1, x_2, x_3) \ge 0$$

أوجد الحل الأمثل لهذا البرنامج الخطي باستخدام الطريقة المبسطة .

الحل :

أولاً: إيجاد الصيغة النموذجية للبرنامج الحالي ، وذلك بإضافة مجاهيل الفروق.

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 0 \,.\, S_1 + 0 \,.\, S_2 + 0 \,.\, S_3$$

S.t.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + S_1 = 430$$
$$3x_1 + 2x_3 + S_2 = 460$$
$$x_1 + 4x_2 + S_3 = 420$$
$$(x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, S_3) \ge 0$$

المبدأ بحل أولي ، بحيث تكون فيه جميع المتغيرات الحقيقية مساوية للصفر، أي :

$S_3 = 420$, $S_2 = 640$, $S_1 = 430$, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

ثم ترتب هذه المعلومات في الجدول التالي :

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	R.S.
Z	1	-3	-2	-5	0	0	0	0
S_1	0	1	2	1	1	0	0	430
S_2	0	3	0	2	0	1	0	460
S_3	0	1	4	0	0	0	1	420

الجدول (1)

حيث يمكن كتابة دالة الهدف كما يلي :

$$Z - 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 0 \,.\, S_1 - 0 \,.\, S_2 - 0 \,.\, S_3 = 0 \text{ Max}$$

من هذا الجدول نجد أن المتغير الداخل هو x_3 ، والمتغير الخارج هو S_2 ، وعنصر الدوران هو نقطة تقاطع سطر S_2 مع عمود x_3 ، يمكن وبتطبيق طريقة غوص – جوردان ، حساب الجدول الجديد التالي :

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	R.S.
Z	1	9/2	-2	0	0	5/2	0	1150
S_1	0	-1/2	2	0	1	-1/2	0	200
x_3	0	3/2	0	1	0	1/2	0	230
S_3	0	1	4	0	0	0	1	420

الجدول (2)

من الجدول (2) نجد أن المتغير الداخل هو x_2 والمتغير الخارج هو S_1 ، لذلك يمكن الحصول على الجدول التالي :

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	R.S.
Z	1	4	0	0	1	2	0	1350
x_2	0	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	100
x_3	0	3/2	0	1	0	1/2	0	230
S_3	0	2	0	0	-2	1	1	20

الجدول (3)

من الجدول (3) نجد للحل الأمثل ، لأن جميع معاملات سطر دالة الهدف غير سالبة . والحل الأمثل هو :

$S_3 = 20$, $S_1 = S_2 = 0$, $x_3 = 230$, $x_2 = 100$, $x_1 = 0$

والقيمة العظمى لدالة الهدف : $Z^* = 1350$

ملاحظة 2 :

إذا كنا نبحث في مشكلة خفض الكلف ، أي أننا نسعى لإيجاد أصغر قيمة لدالة الهدف ، فإننا نعالج هذه المشكلة بشكل مشابه لمشكلة البحث عن أعظم قيمة لدالة الهدف . الفرق الوحيد بينهما متعلق بسطر دالة الهدف ، ذلك أن هدفنا هو تخفيض الكلف ، لذا فإن المتغير الداخل (المتغير الذي سيدخل الحل الجديد) سيكون المتغير الذي يرافقه أكبر عنصر موجب في سطر دالة الهدف ، لأن إدخال هذا المتغير سيؤدي إلى تخفيض الكلف أكثر من أي متغير آخر . ونتوصل أيضاً للحل الأمثل لمشكلة تخفيض الكلف عندما نجد أن العناصر في سطر دالة الهدف جميعها أصغر أو تساوي الصفر .

حالة تطبيقية 13 :

أوجد الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية الآتية :

$$\text{Min } z = x_1 - 3x_2 - 2x_3$$

S.t.

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &\le 7 \\ -2x_1 + 4x_2 &\le 12 \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 &\le 10 \\ (x_1 , x_2 , x_3) &\ge 0 \end{aligned}$$

الحـل :

نكتب هذه المشكلة بالصيغة النموذجية ، وذلك بإضافة متغيرات الفروق:

$$\text{Min } z = x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 0 . S_1 + 0 . S_2 + 0 . S_3$$

S.t.

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + S_1 &= 7 \\ -2x_1 + 4x_2 + S_2 &= 12 \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + S_3 &= 10 \\ (x_1 , x_2 , x_3 , S_1 , S_2 , S_3) &\ge 0 \end{aligned}$$

تبـدأ طريقـة السـمبلكس بحـل أولـي تكـون فيـه جميـع قـيم المتغيـرات الحقيقيـة مسـاوية للصفر ، أي :

$$S_3 = 10 \quad , \quad S_2 = 12 \quad , \quad S_1 = 7 \qquad \& \qquad x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

كما يمكن ترتيب هذا الحل في الجدول التالي :

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	R.S.
Z	1	-1	3	2	0	0	0	0
S_1	0	3	-1	2	1	0	0	7
S_2	0	-2	4	0	0	1	0	12
S_3	0	-4	3	8	0	0	1	10

الجدول (1)

بما أن المشكلة هي مشكلة البحث عن قيمة صغرى لدالة الهدف ، فإن المتغير الداخل إلى الحل هو ذلك المتغير الذي يرافقه أكبر عنصر موجب في سطر دالة الهدف ، أي x_2 ، فيكون عمود x_2 هو العمود المحوري .

أما المتغير الخارج من الحل الحالي فهو المتغير الذي تقابله أقل نسبة ناتجة من تقسيم عناصر عمود الطرف الأيمن على العناصر المقابلة لها من العمود المحوري (الأرقام الموجبة فقط). وبالتالي فالمتغير الخارج من الحل الحالي هو S_2 والعنصر المحوري هو 4 .

وبتطبيق طريقة غوص – جوردان في حساب الحل الجديد ، نحصل على الجدول التالي :

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	R.S.
Z	1	1/2	0	2	0	-3/4	0	-9
S_1	0	5/2	0	2	1	¼	0	10
x_2	0	-1/2	1	0	0	¼	0	3
S_3	0	-5/2	0	8	0	-3/4	1	1

الجدول (2)

من الجدول (2) نجد أن المتغير الداخل هو x_3 والمتغير الخارج هو S_3 والعنصر المحوري 8 . وبتطبيق طريقة غوص – جوردان في الحساب ، يمكن الحصول على الجدول (3).

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	R.S.
Z	1	18/16	0	0	0	-9/16	-2/8	-74/8
S_1	0	25/8	0	0	1	7/16	-2/8	78/8
x_2	0	-1/2	1	0	0	1/4	0	3
x_3	0	-5/16	0	1	0	-3/32	1/8	1/8

الجدول (3)

والعنصر S_1 **والمتغير الخارج هو** x_1 **نجد أن المتغير الداخل هو** (3) **من الجدول المحوري** 8 / 25 **. وبتطبيق طريقة غوص – جوردان في الحساب يمكن الحصول على الجدول** (4).

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	R.S.
Z	1	0	0	0	-9/25	-288/400	-32/200	-2552/200
x_1	0	1	0	0	8/25	7/50	-2/25	78/25
x_2	0	0	1	0	1/50	13/50	-1/50	228/50
x_3	0	0	0	1	1/10	-28/160	1/10	88/80

الجدول (4)

نجد أننا وصلنا للحل الأمثل ، حيث جميع معاملات سطر دالة الهدف (4) **من الجدول غير موجبة ، وبالتالي فإن الحل الأمثل هو :**

$S_1 = S_2 = S_3 = 0 \quad , \quad x_3 = 88/80 \quad , \quad x_2 = 228/50 \quad , \quad x_1 = 78/25$

وأن القيمة الصغرى لدالة الهدف هي : $z^* = -2552/200$

المبحث الثالث
طريقة المتغيرات الاصطناعية
Artificial Variables Method

تبدأ الطريقة المبسطة بحل أولي ممكن تكون فيه متغيرات الفروق هي المتغيرات الأساسية وجميع المتغيرات الحقيقية مساوية للصفر . بالطبع ، هذه البداية ممكنة كما إتضح عندما تكون جميع القيود بشكل متراجحات ($\leq$ أصغر أو يساوي) وجميع قيم الطرف الأيمن غير سالبة .

نتناول في هذه الفقرة الحالات التي لا يمكن فيها اعتبار متغيرات الفروق كمتغيرات أساسية في الحل الأولي (أي لا تعطي حلاً أولياً ممكناً) ، ويمكن أن نصادف هذه الحالات ، بشكل عام ، عندما تكون جميع أو بعض القيود بشكل متراجحات($\geq$ أكبر أو يساوي) أو بشكل متساويات . في مثل هذه الحالات نستخدم طريقة المتغيرات الاصطناعية ، والتي يمكن أن تُعرَض بأحد الشكلين التاليين :

1. طريقة M الكبيرة .

2. طريقة الحل على مرحلتين .

ولندرس كلاً من هاتين الطريقتين :

1. طريقة M الكبيرة : Big - M Technique**:**

لنفرض أننا نريد إيجاد الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية الآتية :

$$\begin{pmatrix} \text{Min} \\ \text{Max} \end{pmatrix} \; z = 10\,x_1 + 6\,x_2 + 8\,x_3$$

$$\text{S.t.}$$

$$4\,x_1 + 5\,x_2 + 3\,x_3 \geq 320$$

$$2\,x_1 + 3\,x_2 = 100$$

$$(x_1 \,,\, x_2 \,,\, x_3) \geq 0$$

لكي نبدأ بحل هذه المشكلة ، يجب تحويلها إلى الصيغة النموذجية ، وبعد ذلك نبدأ الحل من نقطة الأصل (المبدأ) .

في القيد الأول : $4\,x_1 + 5\,x_2 + 3\,x_3 \geq 320$

يلاحظ أن المتراجحة بشكل ($\geq$ أكبر أو يساوي) ، وبالتالي يجب طرح متغير فرق لكي يصبح هذا القيد بشكل مساواة :

$$4\,x_1 + 5\,x_2 + 3\,x_3 - S_1 = 320$$

إذا أردنـا حـل هـذه المشـكلة مبتـدئين بنقطـة الأصـل (المبـدأ) ، حيـث تكـون جميـع المتغيرات الحقيقية مساوية للصفر ، فإن هذا يعني أن :

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0 \qquad \& \qquad S_1 = -320$$

لا يحقق شرط $S_1 = -320$ **ويكون هذا مخـالف لأحد افتراضـات البرمجـة الخطيـة لأن عدم السلبية.لحل هذه المشكلة ، لا بد من القيام بخطوة أخرى . وتتمثل هذه الخطوة بإضـافة متغير اصطنـاعي للقيد ، كالآتـي :**

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 - S_1 + R_1 = 320$$

حيث R_1 **. هو المتغير الاصطنـاعي**

في هذه الحالـة يمكن افتراض القيم :

$$x_1 = x_2 = x_3 = S_1 = 0 \qquad \& \qquad R_1 = 320$$

ونكون بذلك قد تخلصنا من مشكلة عدم تحقق شرط عدم السلبية للمتغيرات .

أما فيما يتعلق بالقيد الثاني :

$$2\,x_1 + 3\,x_2 = 100$$

فهنا لا يمكن إضافة أو طرح متغير فرق ، لذلك نضيف متغير اصطناعي لكي نتمكن من إدراج هذا القيد في جدول الطريقة المبسطة ، كالتالي :

$$2\,x_1 + 3\,x_2 + R_2 = 100$$

الهدف من إضافة المتغير الاصطناعي للقيد بعلاقة مساواة هو ليس حلاً لمشكلة بسيطة كهذه ، ولكن يعد حلاً لمشاكل تحتوي على متغيرات وقيود كثيرة . حيث أننا بإضافة المتغير الاصطناعي وافتراض قيم المتغيرات الحقيقية مساوية للصفر، فإنه يمكننا إيجاد الحل الأولي . وجدير بالاهتمام ملاحظة أن المتغيرات الاصطناعية ليس لها معنى بالواقع ، ولكنها عبارة عن وسائل حسابية للمساعدة في إيجاد الحل الأولي لمشكلة برمجة خطية . وتختفي هذه المتغيرات من الحل قبل الوصول للحل الأمثل .

المتغيرات الاصطناعية في دالة الهدف :

عند إضافة المتغيرات غير الحقيقية (متغيرات الفروق و / أو المتغيرات الاصطناعية) لا بد لهذه المتغيرات من أن تظهر كذلك في دالة الهدف ، تماماً كما حدث عندما أضفنا متغيرات الفروق في حالة (أصغر أو يساوي . ولما كان من الضروري إخراج المتغيرات الاصطناعية من الحل ، فهذا يعني أن بإمكاننا افتراض كلفة عالية لهذه المتغيرات .

إذا كانت المشكلة تهدف إلى إيجاد القيمة الصغرى لدالة الهدف ، فإنه من المفضل إدخال المتغيرات ذات الكلفة الأقل للحل ، والمتغيرات ذات الكلفة الأكبر يجب إخراجها من الحل بسرعة . لذلك نضيف في هذه الحالة المتغيرات الاصطناعية إلى دالة الهدف بأمثال M، ولتكن كبيرة جداً .

أما إذا كانت المشكلة تهدف إلى إيجاد القيمة العظمى لدالة الهدف ، فإنه من المفضل إدخال المتغيرات ذات العائد العالي للحل ، والمتغيرات ذات العائد الأقل يجب إخراجها من الحل بسرعة . لذلك في هذه الحالة يجب علينا إضافة المتغيرات الاصطناعية إلى دالة الهدف بأمثال كبيرة (M) وبإشارة سالبة .

حالة تطبيقية 14 :

أوجد الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية الآتية :

$$\text{Min } z = 4x_1 + x_2$$

S.t.

$$3x_1 + x_2 = 3 \quad (1)$$
$$4x_1 + 3x_2 \geq 6 \quad (2)$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 3 \quad (3)$$
$$(x_1 , x_2) \geq 0$$

الحـل :

تحول هذه المشكلة إلى الصيغة النموذجية ، مما يتطلب إضافة متغيري فرق للقيـدين الثاني والثالث فيصبحان بالشكل الآتي :

$$4x_1 + 3x_2 - S_2 = 6$$
$$x_1 + 2x_2 + S_3 = 3$$

وتصبح المشكلة بالشكل الآتي :

$$\text{Min } z = 4x_1 + x_2 + 0 . S_2 + 0 . S_3$$

S.t.

$$3x_1 + x_2 = 3 \quad (1)$$
$$4x_1 + 3x_2 - S_2 = 6 \quad (2)$$
$$x_1 + 2x_2 + S_3 = 3 \quad (3)$$
$$(x_1 , x_2 , S_2 , S_3) \geq 0$$

يلاحظ هنـا أن القيـدين الأول والثـاني لا يعطيـان متغيـرات يمكـن أن نبـدأ بهـا كمتغيـرات أساسية . ولكن القيد الثالث يعطي S_3 والذي يمكن اعتباره متغيراً أساسياً فـي الحـل الأولـي. لذلك نضيف متغيرات اصطناعية للقيدين الأول والثاني، وبنـاءً على مـا سبق تصبح المشـكلة كالتالي :

$$\text{Min } z = 4x_1 + x_2 + 0 . S_2 + 0 . S_3 + MR_1 + MR_2$$

S.t.

$$3x_1 + x_2 + R_1 = 3 \quad (1)$$
$$4x_1 + 3x_2 - S_2 + R_2 = 6 \quad (2)$$
$$x_1 + 2x_2 + S_3 = 3 \quad (3)$$
$$(x_1 , x_2 , S_2 , S_3 , R_1 , R_2) \geq 0$$

حيث M. عدد موجب كبير جداً

يمكن أن نرتب هذه المعلومات في الجدول الآتي ، وذلك بعد اعتبار الحل الأولي الممكـن كالتالي :

$$S_3 = 3 \quad , \quad R_2 = 6 \quad , \quad R_1 = 3 \quad \& \quad x_1 = x_2 = S_2 = 0$$

	Z	x_1	x_2	S_2	R_1	R_2	S_3	R.S.
Z	1	-4	-1	0	-M	-M	0	0
R_1	0	3	1	0	1	0	0	3
R_2	0	4	3	-1	0	1	0	6
S_3	0	1	2	0	0	0	1	3

الجدول (1)

يلاحظ من الجدول (1) أنه يجب إجراء بعض التحويلات الأولية على المصفوفة الممثلة للحل الأولي الذي بدأنا به ، وذلك لأن أمثال المتغيرات الأساسية في دالة الهدف يجب أن تكون مساوية للصفر . وللحصول على هذا فإننا نضرب كل من سطري R_2,R_1 بـ M ونجمعهما إلى سطر دالة الهدف ، فنحصل على الجدول الجديد التالي :

	Z	x_1	X_2	S_2	R_1	R_2	S_3	R.S.
Z	1	-4+7M	-1+4M	-M	0	0	0	9M
R_1	0	3	1	0	1	0	0	3
R_2	0	4	3	-1	0	1	0	6
S_3	0	1	2	0	0	0	1	3

الجدول (2)

بما أن المشكلة هي مشكلة بحث عن قيم صغرى لدالة الهدف ، فإن يمكن تحسين الحل بإدخال المتغير الذي يرافقه معامل موجب في سطر دالـة الهدف . ومن الجدول (2) نجد أن المتغير الذي سيدخل الحل هو x_1 ، والمتغير الخـارج هو R_1 – وبتطبيق طريقة غوص – جوردان في حساب الجدول الجديد نجد:

	Z	x_1	x_2	S_2	R_1	R_2	S_3	R.S.
Z	1	0	(1+5M)/3	-M	(4-7M)/3	0	0	4+2M
x_1	0	1	1/3	0	1/3	0	0	1
R_2	0	0	5/3	-1	-4/3	1	0	2
S_3	0	0	5/3	0	-1/3	0	1	2

الجدول (3)

ومن هذا الجدول نجد أنه يمكن إدخال المتغير x_2 واخراج R_2: فنحصل على الآتي

	Z	x_1	x_2	S_2	R_1	R_2	S_3	R.S.
Z	1	0	0	1/5	8/5 – M	-1/5 – M	0	18/5
x_1	0	1	0	1/5	3/5	-1/5	0	3/5
x_2	0	0	1	-3/5	-4/5	3/5	0	6/5
S_3	0	0	0	1	1	-1	1	0

الجدول (4)

كذلك من الجدول (4) يلاحظ أنـه يجب إدخـال المتغيـر S_2 لتحسين الحل وأن المتغير الخـارج من الحل هو المتغير S_3 والعنصر المحوري هو (1) – بتطبيق طريقـة غوص – جوردان نحصل على ما يلي :

	Z	x_1	x_2	S_2	R_1	R_2	S_3	R.S.
Z	1	0	0	0	7/5 – M	-M	-1/5	18/5
x_1	0	1	0	0	2/5	0	-1/5	3/5

x_2	0	0	1	0	-1/5	0	3/5	6/5
S_2	0	0	0	1	1	-1	1	0

الجدول (5)

يعطي الجدول (5) الحل الأمثل لهذه المشكلة والذي يكون :

$x_1 = 3/5$, $x_2 = 6/5$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$, $R_1 = 0$, $R_2 = 0$

وأن أصغر قيمة لدالة الهدف هي : $z^* = 18/5$

ملاحظة 1 :

هناك نقطة ضعف في طريقة M الكبيرة ، وهي إمكانية حدوث خطأ حسابي عندما نعطي M قيمة كبيرة جداً . ولتوضيح ذلك نفترض أن M=10000 في المثال السابق . من هذا المثال يلاحظ أن معامل x_1 في دالة الهدف هو (-4 + في الجدول (2) ومعامل x_2 في دالة الهدف هو (70000 . كما أن تأثير معاملات المتغيرات (40000 +1-) في دالة الهدف هو الحقيقية (1,4) صغير جداً بالمقارنة مع العدد الكبير الناتج من ضرب M بعدة أمثال . عند إجراء الحسابات في أي جهاز حاسوب الذي يمكن أن يقوم بعمليات تقريب الأعداد ، فإن الحل لن يكون حساساً للقيم العائدة إلى معاملات المتغيرات الحقيقية x_2 , x_1 في سطر دالة الهدف . والأخطر من ذلك أنه قد يعامل x_2,x_1 وكأن لها معاملات متساوية في دالة الهدف . لتجنب هذه الصعوبة في طريقة M الكبيرة ، نقدم طريقة ثانية تسمى طريقة الحل على مرحلتين .

2 - طريقة الحل بمرحلتين (Two - Phase Method):

سُمِّيَت هذه الطريقة بهذا الاسم لأنها تحل مشكلة البرمجة الخطية على مرحلتين :

المرحلة الأولى :

يتم في هذه المرحلة تشكيل مشكلة جديدة يكون الهدف فيها البحث عن القيمة الصغرى لتابع هدف جديد مساوٍ لمجموع المتغيرات الاصطناعية وخاضع لمجموعة قيود المشكلة الأصلية .

إذا كان هناك حل للمشكلة الجديدة ، فإن القيمة الصغرى لدالة الهدف الجديد هي الصفر (وهذا ما يشير إلى أن كل المتغيرات الاصطناعية تأخذ قيمة الصفر)، وبالتالي نذهب إلى المرحلة الثانية . أما إذا لم يكن هناك حل للمشكلة الجديدة وكانت القيمة الصغرى لدالة الهدف الجديد أكبر من الصفر، فإننا أمام حالة عدم وجود حل للمشكلة الأصلية .

المرحلة الثانية :

نأخذ الحل الأمثل الذي حصلنا عليه في المرحلة الأولى ويعد كحل أولي نبدأ منه لحل المشكلة الأصلية . وفي هذه الحالة ، يعبّر عن دالة الهدف للمشكلة الأصلية بواسطة المتغيرات غير الأساسية باستخدام طريقة غوص – جوردان .

حالة تطبيقية 15 :

أوجد الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية المذكورة في المثال السابق والمحلولة وفق طريقة M. الكبيرة

الحل :

المرحلة الأولى :

نشكل دالة الهدف الجديد : $Min\ z_0 = R_1 + R_2$ ، أما القيود فتبقى كما هي (أي نفس قيود المشكلة الأصلية) ، وبالتالي نحصل على الجدول :

	Z_0	x_1	x_2	S_2	R_1	R_2	S_3	R.S.
Z_0	1	0	0	0	-1	-1	0	0
R_1	0	3	1	0	1	0	0	3
R_2	0	4	3	-1	0	1	0	6
S_3	0	1	2	0	0	0	1	3

)الجدول 1(

لكي نحصل على جدول يعطي حلاً أولياً ممكناً مبتدئين من نقطة الأصل نجمع كلاً من سطري R_2,R_1 إلى سطر دالة الهدف، فنحصل على الجدول التالي :

	Z_0	x_1	x_2	S_2	R_1	R_2	S_3	R.S.
Z_0	1	7	4	-1	0	0	0	9
R_1	0	3	1	0	1	0	0	3
R_2	0	4	3	-1	0	1	0	6
S_3	0	1	2	0	0	0	1	3

)الجدول 2(

بما أننا نبحث عن القيمة الصغرى لدالة الهدف Z_0 فإننا ندخل المتغير x_1 إلى الحل ونخرج المتغير R_1 فنحصل على الجدول التالي :

	Z_0	x_1	x_2	S_2	R_1	R_2	S_3	R.S.
Z_0	1	0	5/3	-1	-7/3	0	0	2
x_1	0	1	1/3	0	1/3	0	0	1
R_2	0	0	5/3	-1	-4/3	1	0	2
S_3	0	0	5/3	0	-1/3	0	1	2

الجدول (3)

نقوم بإدخال المتغير x_2 إلى الحل ونخرج المتغير R_2 من الحل فنحصل على الجدول التالي :

	Z_0	x_1	x_2	S_2	R_1	R_2	S_3	R.S.
Z_0	1	0	0	0	-1	-1	0	0
x_1	0	1	0	1/5	3/5	-1/5	0	3/5
x_2	0	0	1	-3/5	-4/5	3/5	0	6/5
S_3	0	0	0	1	1	-1	1	0

الجدول (4)

من هذا الجدول يلاحظ الوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة الجديدة والتي يكون فيها القيمة الصغرى لدالة الهدف مساوية للصفر، كما أن قيمة كل من المتغيرات الاصطناعية مساوية لصفر. والآن باستطاعتنا البدء بالمرحلة الثانية من الحل .

المرحلة الثانية :

يلاحظ أن المتغيرات الاصطناعية قد حذفت من الجدول الأخير في المرحلة الأولى ، وبالتالي فهي ليست متغيرات أساسية . الآن نبدأ المرحلة الثانية من الجدول (4) وذلك بعد ، تبديل دالة الهدف Z_0: بدالة الهدف في المشكلة الأصلية، فيكون لدينا

	Z	x_1	x_2	S_2	S_3	R.S.
Z	1	-4	-1	0	0	0
x_1	0	1	0	1/5	0	3/5
x_2	0	0	1	-3/5	0	6/5
S_3	0	0	0	1	1	0

الجدول (5)

ومرة أخرى ، فإن معاملات المتغيرات الأساسية في سطر دالة الهدف يجب أن تكون أصفاراً لذلك نجري بعض التحويلات الأولية على المصفوفة . نضرب سطر x_1 بـ 4 ، ونضرب سطر x_2 بـ 1 ونجمعهما إلى سطر دالة الهدف ، فنحصل على ما يلي :

	Z	x_1	x_2	S_2	S_3	R.S.
Z	1	0	0	1/5	0	18/5
x_1	0	1	0	1/5	0	3/5
x_2	0	0	1	-3/5	0	6/5
S_3	0	0	0	1	1	0

الجدول (6)

لا يعطي الجدول (6) الحل الأمثل ، لأنه ما زال المتغير S_2 يرافقه معامل موجب في سطر دالة الهدف ، وبالتالي يمكن تحسين الحل . يلاحظ أن المتغير الداخل إلى الحل هو S_2 ، والمتغير الخارج من الحل هو S_3 ، وبتطبيق طريقة غوص - جوردان نحصل على الجدول الذي يعطي الحل الأمثل وهو مطابق تماماً لجدول الحل الأمثل الذي حصلنا عليه في طريقة M الكبيرة.

ملاحظة 2 :

في المرحلة الأولى من الحل يكون هدف المشكلة الجديدة المشكّلة هو إيجاد القيمة الصغرى لدالة الهدف الجديد Z_0 بغض النظر عن هدف المشكلة الأصلية سواءً كان إيجاد القيمة العظمى أو الصغرى لدالة الهدف الأصلي.

ملاحظة 3 :

يجب ملاحظة أنه يتم حذف المتغيرات الاصطناعية في المرحلة الثانية فقط عندما تكون متغيرات غير أساسية في نهاية المرحلة الأولى . كما يمكن أن نصادف حالات يبقى المتغير الاصطناعي كمتغير أساسي ، ولكن قيمته مساوية للصفر . وكمثال على هذه الحالات ، يلاحظ في الجدول (3) من المثال السابق أنه يمكن إخراج S_3 أو R_2 من الحل . فإذا قررنا

سيبقى كمتغير أساسي في جدول الحل الأمثل ، ولكن بقيمة صفر . وفي R_2 ، فإن S_3إخراج هذه الحالة يجب استخدام المتغير الاصطناعي في جدول الحل الأولي الذي نبدأ فيه المرحلة الثانية .

المبحث الرابع

حالات خاصة

يتناول هذا المبحث بعض الحالات الخاصة التي يمكن مواجهتها أثناء حل المشاكل البرمجة الخطية باستخدام الطريقة المبسطة .

1 - الدوران (Degeneracy) :

نصادف هذه المشكلة عندما يكون أحد قيود المشكلة قيداً فائضاً ، وتبرز مشكلة الدوران عند حساب النسبة (العناصر في عمود الطرف الثاني ÷ العناصر في العمود المحوري) من أجل تحديد المتغير الخارج من الحل وكان هناك مساواة في النسبة الأقل لأكثر من سطر ، وهذا يعني أن هناك دوران في الحل .

إن وجود تعادل في النسبة الأقل لأكثر من سطر يعني أن قيمة أحد المتغيرات الأساسية في الحل القادم تساوي الصفر . إن وجود قيمة صفرية لأحد المتغيرات الأساسية ليست مشكلة ، ولكنها ستكون مشكلة إذا ظهرت هذه القيمة قبل الوصول للحل الأمثل ، وذلك إن هذا يستدعي الدوران (التحرك للخلف والأمام) وقد يؤدي إلى عدم الوصول للحل الأمثل.

بشكل عام ، إذا حصل تعادل في النسبة الأقل لمشكلة برمجة خطية ، فإننا ننصح باختيار السطر الأعلى من الجدول المذكور ليكون السطر المحوري .

حالة تطبيقية 16 :

أوجد الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية الآتية :

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 9x_2$$

$$\text{S.t.}$$

$$x_1 + 4x_2 \le 8$$

$$x_1 + 2x_2 \le 4$$

$$(x_1 , x_2) \ge 0$$

الحل :

بعد إيجاد الصيغة النموذجية لهذه المشكلة بإضافة متغيرات الفروق وترتيب المعطيات في جدول ، نجد ما يلي :

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R.S.
Z	1	-3	-9	0	0	0
S_1	0	1	4	1	0	8
S_2	0	1	2	0	1	4

الجدول (1)

من الجدول (1) يلاحظ امكانية تحسين الحل بادخال المتغير x_2 و اخراج المتغير S_1 فنجد :

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R.S.
Z	1	-3/4	0	9/4	0	18
x_2	0	1/4	1	1/4	0	2
S_2	0	1/2	0	-1/2	1	0

الجدول (2)

ندخل المتغير x_1 إلى الحل ونخرج S_2: فنحصل على الجدول التالي

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R.S.
Z	1	0	0	3/2	3/2	18
x_2	0	0	1	1/2	-1/2	2
x_1	0	1	0	-1	2	0

الجدول (3)

وبهذا نكون وصلنا للحل الأمثل ، وهو :

$Z^* = 18 \quad , \quad x_2 = 2 \quad , \quad x_1 = 0$

يلاحظ في هذا المثال ، أن قيمة المتغيرات في الجدولين (2) و (3) كانت نفسها بالضبط . وهنا نكون أمام حالة دوران في الحل ، وذلك لأن في الجدولين تكون قيمة أحد المتغيرات الأساسية صفراً .

السؤال الذي يطرح نفسه الآن ، لماذا لا نتوقف عن الحل عند ظهور المشكلة لأول مرة ؟ الجواب على ذلك هو أنه لا أحد يستطيع أن يتوقع بأنه تم الوصول للحل الأمثل عند ظهور مشكلة الدوران ، كما أنه يمكن أن تكون مشكلة الدوران مؤقتة وتزول في الجداول اللاحقة .

2 - عدم محدودية الحل (Unboundness) :

نصادف هذه الحالة عندما تكون منطقة الامكانات غير محدودة ، وبالتالي نستطيع زيادة الربح إلى اللانهاية . عند استخدام الطريقة المبسطة ، نحصل على حل غير محدود إذا كانت عناصر العمود المحوري لأي متغير يمكن إدخاله للحل سالبة أو مساوية للصفر في جدول من جداول الحل . أي لا يمكننا إيجاد العنصر المحوري (عنصر الدوران) .

مثال 2 :

أوجد الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية الآتية :

$$\text{Max } Z = 2x_1 + x_2$$

S.t.

$$x_1 - x_2 \leq 10$$

$$2x_1 - x_2 \leq 40$$

$$(x_1, x_2) \geq 0$$

الحـل :

ايجاد الصيغة النموذجية لهذه المشكلة ، وترتيب الحل الأولي في الجدول التالي :

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R.S.
Z	1	-2	-1	0	0	0
S_1	0	1	-1	1	0	10
S_2	0	2	-1	0	1	40

الجـدول (1)

بمـا أن معـاملات x_2 . x_2 أو بادخـال المتغيـر x_1يمكـن تحسـين الحـل بادخـال المتغيـر جميعها سـالبة ، فإنـه يمكـن أن يأخذ قيمـة كبيـرة وغيـر محـدودة . وبالتـالي فـإن دالـة الهـدف سيكون غير محدود ، ويمكن أن يأخذ قيماً كبيرة حتى اللانـهاية .

3 - وجود أكثر من حل أمثل (Alternative Optimal Solutions) :

نصادف هذه الحالـة عنـدما يخـرج دالـة الهـدف مـن منطقـة الامكانـات بشكل موازٍ للقيـد الذي يحدها . وفي هذه الحالـة يبلـغ دالـة الهدف قيمته المثلى في أية نقطـة مـن نقـاط المستقيم الذي خرج منـه دالـة الهدف .

عند استخدام الطريقة المبسطة ، فإن ذلك يعني أن دالـة الهدف يبلـغ قيمتـه المثلـى عنـد أكثـر مـن حـل أسـاسـي . ويمكـن أن تحصـل هـذه الحالـة إذا كـان فـي الحـل النـهـائي معامـل أحـد المتغيرات غير الأساسية في سطر دالـة الهدف مساوٍ للصفر .

حالة تطبيقية 17 :

أوجد الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية الآتية :

$$\begin{aligned}
&\text{Max } Z = 4x_1 + 14x_2\\
&\quad \text{S.t.}\\
&\qquad 2x_1 + 7x_2 \le 21\\
&\qquad 7x_1 + 2x_2 \le 21\\
&\qquad (x_1 , x_2) \ge 0
\end{aligned}$$

الحـل :

بعد إيجـاد الصيغة النموذجيـة لهذه المشكلة ، نرتـب المعطيـات فـي جدول الحـل الأولـي التالي :

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R.S.
Z	1	-4	-14	0	0	0

S_1	0	2	7	1	0	21
S_2	0	7	2	0	1	21

الجدول (1)

والمتغير الخارج من الحل هو S_1 ، إن المتغير الداخل إلى الحل هو x_2.

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R.S.
Z	1	0	0	2	0	42
x_2	0	2/7	1	1/7	0	3
S_2	0	45/7	0	-2/7	1	15

الجدول (2)

وبذلك يتم الوصول للحل الأمثل ، وهو :

$Z^* = 42 \quad , \quad x_2 = 3 \quad , \quad x_1 = 0$

ولكن يلاحظ أن معامل x_1 في سطر دالة الهدف مساوٍ للصفر ، وهذا يعني أن هناك عدداً لا نهائياً من الحلول . وكمثال على حلٍ آخر نقوم بادخال المتغير x_1 إلى الحل ، وإخراج S_2 ، فنحصل على الجدول التالي :

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R.S.
Z	1	0	0	2	0	42
x_2	0	0	1	7/45	-2/45	7/3
x_1	0	1	0	-2/45	7/45	7/3

الجدول (3)

الحل الأمثل الجديد هو : $Z^* = 42 \quad , \quad x_1 = x_2 = 7/3$

أي أن قيمة دالة الهدف لم تتغير .

الآن ، لو أخذنا الحلين الأساسيين :

$x_1 = x_2 = 7/3$ و $x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 3$

يمكن البرهان على أن أي حل ناتج من تركيب خطي محدب لهذين الحلين هو حل أمثل . فإذا كان :

$$\tilde{x}_2 = \lambda(3) + (1-\lambda)\left(\frac{7}{3}\right) \quad , \quad \tilde{x}_1 = \lambda(0) + (1-\lambda)\left(\frac{7}{3}\right)$$

أو :

$$\tilde{x}_2 = \left(\frac{1}{3}\right)(7+2\lambda) \quad , \quad \tilde{x}_1 = \left(\frac{7}{3}\right)(1-\lambda)$$

حيث : $0 \le \lambda \le 1$

من أجل أي قيمة لـ $\lambda \in [0,1]$ **الحل** $(\tilde{x}_2 , \tilde{x}_1)$ **سيعطي نفس القيمة لدالة الهدف** Z.

4 - عدم وجود حل (Infeasibility) :

يعني ذلك عدم وجود أية نقطة تحقق جميع قيود المشكلة . وبتعبير آخر ، تكون منطقة الامكانات عبارة عن مجموعة خالية . عند استخدام الطريقة المبسطة ، يلاحظ ذلك عند الوصول إلى الجدول الذي يعطي الحل الأمثل ، ولكن هناك متغير اصطناعي لا يزال موجوداً في الحل بين المتغيرات الأساسية وبقيمة موجبة .

حالة تطبيقية 18 :

أوجد الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية الآتية :

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$
$$\text{S.t.}$$
$$2x_1 + x_2 \le 2$$
$$3x_1 + 4x_2 \ge 12$$
$$(x_1 , x_2) \ge 0$$

الحـل :

بعد إيجاد الصيغة النموذجية لهذه المشكلة وإضـافة المتغير الاصطناعي للقيـد الثـاني ، ترتب المعطيات في جدول الحل الأولي الممكن التالي :

	Z	x_1	x_2	S_2	S_1	R_1	R.S.
Z	1	-3-3M	-2-4M	M	0	0	-12M
S_1	0	2	1	0	1	0	2
R_1	0	3	4	-1	0	1	12

)الجـدول 1(

، فنجد : S_1 ، والمتغير الخارج هو x_2 المتغير الداخل إلى الحل هو

	Z	x_1	x_2	S_2	S_1	R_1	R.S.
Z	1	1+5M	0	M	2+4M	0	4-4M
x_2	0	2	1	0	1	0	2
R_1	0	-5	0	-1	-4	1	4

)الجـدول 2(

يلاحظ ان الجدول لا يعطي إمكانية لإدخال متغير إلى الحل ، وهو حسب شرط المثالية يعطي حلاً مثالياً . ولكن المتغير الاصطناعي R_1 بقي كمتغير أساسي وبقيمة موجبة ، وهذا يعني أنه لا يوجد حل لهذه المشكلة .

ملاحظة 1 :

إذا بقيت قيمة المتغير الاصطناعي في الحل الأمثل مساوية للصفر ، فإن ذلك لا يشكل حاجزاً أمام وجود الحل الأمثل ، ويمكن أن يوجد حل للمشكلة .

المبحث الخامس

النموذج المقابل (الثنائي) (Duality)

لكل مشكلة برمجة خطية هناك مشكلة أخرى مرتبطة بها، نسمي إحدى هاتين المشكلتين بالمشكلة الأولية ، والأخرى نسميها النموذج المقابل . وتمتلك كلتا المشكلتين خواص مرتبطة مع خواص الأخرى . فمثلاً ، الحل الأمثل لإحدى هاتين المشكلتين يعطي معلومات كاملة عن الحل الأمثل للمشكلة الأخرى .

1 تعريف : تعريف النموذج المقابل : (Dual Form)

النموذج المقابل عندما تكون المشكلة الأولية معطاة بإحدى الصيغتين :

1 - الصيغة المعيارية .

2 - الصيغة النموذجية .

وسندرس النموذج المقابل لكل صيغة بشكل منفصل .

1 - النموذج المقابل عندما تكون المشكلة الأولية بالصيغة المعيارية :

نفرض مشكلة البرمجة الخطية بصيغتها المعيارية الآتية :

$$\text{Max} \quad X_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j \, x_j$$

$$\text{S.t.}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j \le b_i \qquad ; \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \ge 0 \qquad ; \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

إتضح سابقاً أنه يمكن كتابة أية مشكلة برمجة خطية بالصيغة المعيارية.

إذا افترضنا أن هذه المشكلة هي المشكلة الأولية ، فإن النموذج المقابل لها تعطى بالشكل :

$$\text{Min} \quad Y_0 = \sum_{i=1}^{m} b_i \, y_i$$

$$\text{S.t.}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \; y_i \ge c_j \qquad ; \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$y_i \ge 0 \qquad ; \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

حيث $y_m , \ldots , y_2 , y_1$ هي المتغيرات المقابل .

تـم تشـكيل النمـوذج المقابـل مـن المشـكلة الأوليـة (بالصـيغة المعياريـة) ، والعكـس بالعكس وفق الخطوات الآتية :

1. **يقابل كل قيد في إحدى المشكلتين متغير في المشكلة الأخرى .**
2. **ثوابـت الطـرف الأيمـن فـي إحـدى المشـكلتين هـي معـاملات دالـة الهـدف فـي المشـكلة الأخرى وبنفس الترتيب .**
3. **إذا كان الهدف من إحدى المشكلتين هو إيجـاد القيمـة العظمـى لدالـة الهدف، فإن هدف النموذج المقابل يكون إيجاد القيمة الصغرى لدالة الهدف .**
4. **في مشكلة الحصول على أكبر ربـح ، تكـون جميـع القيـود بشكل متراجحـات (أصـغر أو يساوي) . وفي مشكلة تخفيض الكلف ، تكـون جميـع القيـود بشكل متراجحـات (أكبـر أو يساوي) .**
5. **المتغيرات في كلتا المشكلتين تحقق شرط عدم السلبية .**

1 : حالة تطبيقية 9

أوجد النموذج المقابل لمشكلة البرمجة الخطية الآتية :

$$\text{Max } X_0 = 5x_1 + 6x_2$$

S.t.

$$\left.\begin{array}{lr} x_1 + 9x_2 \le 60 & y_1 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 45 & y_2 \\ 5x_1 - 2x_2 \le 20 & y_3 \\ x_2 \le 30 & y_2 \end{array}\right\}$$

$$(x_1 , x_2) \ge 0$$

الحـل :

لـيكن y_1 المتغيـر المرافـق المقابـل للقيـد الأول ، و y_2 المتغيـر المرافـق المقابـل للقيـد الثانـي ، y_3 المتغير المرافق المقابل للقيد الثالث ، y_4 المتغير المرافق المقابل للقيـد الرابـع في المشكلة الأولية . فيكون النموذج المقابل كما يلـي :

$$\text{Min } Y_0 = 60y_1 + 45y_2 + 20y_3 + 30y_4$$

S.t.

$$y_1 + 2y_2 + 5y_3 \ge 5$$
$$9y_1 + 3y_2 - 2y_3 + y_4 \ge 6$$
$$(y_1 , y_2 , y_3 , y_4) \ge 0$$

يلاحظ أن مصفوفة أمثال القيود في المشكلة الأولية هي منقول مصفوفة أمثال القيود في النموذج المقابل . ويلاحظ في هذا المثال ، أن عدد القيود في النموذج المقابل أقل منها في المشكلة الأولية . بما أن الحل الأمثل لإحدى المشكلتين يمكن الحصول عليه من الحل الأمثل للمشكلة الأخرى ، فإنه سيكون من الأسهل حل النموذج المقابل في هذه الحالة ، وذلك لأن الصعوبات الحسابية في حل مشكلة البرمجة الخطية التي تأتي من كثرة القيود أكثر من تلك التي تأتي من كثرة المتغيرات . وهذا يعطي إحدى فوائد دراسة المشاكل المقابل .

2 - النموذج المقابل عندما تكون المشكلة الأولية بالصيغة النموذجية :

عندما تكون المشكلة الأولية معطاة بالصيغة النموذجية ، فإننا نحصل على النموذج المقابل بتنفيذ نفس الخطوات التي رأيناها في الفقرة السابقة (عندما كانت المشكلة الأولية بالصيغة المعيارية) ، مع ملاحظة فرق وحيد ، وهو أن المتغير المرافق المقابل لقيد المساواة في المشكلة الأولية لا يكون مقيداً (أي لا يفرض عليه شرط عدم السلبية) . وبالعكس ، إذا كان هناك متغيراً في المشكلة الأولية غير مقيداً ، فسيقابله قيداً بشكل مساواة في النموذج المقابل.

بشكل عام ، إذا كانت المشكلة الأولية معطاة بالصيغة النموذجية كما يلي :

$$\text{Max} \quad X_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j$$

$$\text{S.t.}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i \qquad ; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \qquad ; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

فإن النموذج المقابل هي :

$$\text{Min} \quad Y_0 = \sum_{i=1}^{n} b_i\, y_i$$

$$\text{S.t.}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_i \geq c_j \qquad ; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$y_i \ \substack{\leq \\ \geq}\ 0 \qquad ; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

غير مقيدة و يمكن أن تأخذ قيماً موجبة أو سالبة أو y_iحيث نعني بالقيد الأخير أن مساوية للصفر. ومن جهة أخرى ، إذا كانت المشكلة الأولية معطاة بالشكل :

$$Max \quad X_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j \, x_j$$

$$S.t.$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j \le b_i \qquad ; \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \underset{\ge}{\overset{\le}{}} 0 \qquad \forall \; j$$

فإن النموذج المقابل هي :

$$Min \quad Y_0 = \sum_{i=1}^{n} b_i \; y_i$$

$$S.t.$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \; y_i = c_j \qquad ; \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$y_i \ge 0 \qquad ; \quad i = 1, 2, \ldots., m$$

يلاحظ في هذه الحالة ، أن النموذج المقابل تكون بالصيغة النموذجية .

حالة تطبيقية 20 :

إفترض مشكلة البرمجة الخطية الآتية :

$$Max \quad X_0 = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

$$S.t.$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 5$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$$

$$(x_1 \, , \, x_2 \, , \, x_3) \ge 0$$

إن الصيغة النموذجية لهذه المشكلة هي :

$$Max \quad X_0 = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 0 \, . \, S_1$$

$$S.t.$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + S_1 = 5 \qquad y_1$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \qquad y_2$$

$$(x_1 \, , \, x_2 \, , \, x_3 \, , \, S_1) \ge 0$$

النموذج المقابل تعطى بالشكل :

$$Min \quad Y_0 = 5y_1 + 2y_2$$

S.t.

$$y_1 + 2y_2 \geq 5$$
$$2y_1 - y_2 \geq 12$$
$$y_1 + 3y_2 \geq 4$$
$$y_1 \geq 0$$

غير مقيدة y_2

المبحث السادس

الحل الأمثل للنموذج المقابل حسب الطريقة المبسطة

يمكن الحصول على الحل الأمثل للنموذج المقابل مباشرة من جدول الحل الأمثل للمشكلة الأولية. نفترض أن القيود في مشكلة البحث عن قيمة صغرى ستكون من الشكل ($\geq$ أو $=$) أكبر أو يساوي أو مساواة.

أما القيود في مشكلة البحث عن قيمة عظمى ستكون من الشكل ($\leq$ أو $=$) أصغر أو يساوي أو مساواة .

أولاً: العلاقة بين قيمتي تابعي الهدف في المشكلة الأولية والنموذج المقابل :

لتكن X_0 قيمة دالة الهدف في المشكلة الأولية والتي نبحث فيها عن القيمة العظمى . لتكن Y_0 قيمة دالة الهدف في النموذج المقابل والتي نبحث فيها عن القيمة الصغرى . فمن أجل إيجاد حلين لهاتين المشكلتين الأولية والمقابل ، يكون لدينا $X_0 \leq Y_0$. بالإضافة إلى ذلك ، عند نقطة الحل الأمثل لهاتين المشكلتين يكون : $\text{Max } X_0 = \text{Min } Y_0$.

للبرهان على العلاقة الأولى $X_0 \leq Y_0$.

إن القيود في المشكلة الأولية هي من الشكل :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad ; \quad i=1,2,...,m$$

فنجد :iلنضرب الطرفين بـ $y_i \geq 0$ ، ولنشكل الجمع على كل

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = Y_0 \qquad (1)$$

كما أن القيود في النموذج المقابل هي من الشكل :

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \qquad ; \quad j=1,2,...,n$$

فنجد :jلنضرب الطرفين بـ $x_j \geq 0$ ، ولنشكل الجمع على كل

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) \geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = X_0 \qquad (2)$$

، نجد أن (2) مساوٍ للطرف الأيسر في العلاقة (1)بما أن الطرف الأيسر في العلاقة :

$$X_0 \leq Y_0$$

أما العلاقة الثانية $\text{Max } X_0 = \text{Min } Y_0$ ، فيمكن التحقق منها من خلال حل بعض التطبيقات بالطريقة المبسطة ، وملاحظة أن قيمتي دالة الهدف المثاليتين في المشكلة الأولية والنموذج المقابل تكونان متساويتان دائماً .

حالة تطبيقية 21 :

حل المشكلة الأولية الآتية :

$$\text{Max } X_0 = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

S.t.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 5$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$$
$$(x_1, x_2, x_3) \ge 0$$

لايجاد حل هذه المشكلة حسب الطريقة المبسطة .

الحل :

أولاًكتابة المشكلة وفقاً للصيغة النموذجية بإضافة متغير فروق S_1 إلى القيد الأول ، ثم اضافة المتغير الاصطناعي للقيد الثاني ، فتصبح المشكلة كما يلي :

$$\text{Max } X_0 = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 0.S_1 - MR_1$$

S.t.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + S_1 = 5$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + R_1 = 2$$
$$(x_1, x_2, x_3, S_1, R_1) \ge 0$$

ثم ترتب البيانات في الجدول التالي ، حيث يعتمد الحل الصفري كحل أساسي أولي.

$R_1 = 2$ و $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $S_1 = 5$

	X_0	x_1	x_2	x_3	S_1	R_1	R.S.
X_0	1	-5	-12	-4	0	+M	0
S_1	0	1	2	1	1	0	5
R_1	0	2	-1	3	0	1	2

الجدول (1)

نضرب سطر R_1 بـ $-M$ ونجمعه إلى سطر X_0 لكي نحصل على حل أولي ممكن حسب الطريقة المبسطة .

	X_0	x_1	x_2	x_3	S_1	R_1	R.S.
X_0	1	-5-2M	-12+M	-4-3M	0	0	-2M
S_1	0	1	2	1	1	0	5
R_1	0	2	-1	3	0	1	2

الجدول (2)

من الجدول (2) يلاحظ أنه يجب إدخال المتغير x_3 واخراج المتغير R_1 للحل ، فنحصل على الجدول التالي :

	X_0	x_1	x_2	x_3	S_1	R_1	R.S.
X_0	1	-7/3	-40/3	0	0	4/3 + M	8/3
S_1	0	1/3	7/3	0	1	-1/3	13/3
x_3	0	2/3	-1/3	1	0	1/3	2/3

الجدول (3)

من هذا الجدول يلاحظ أنه يجب إدخال المتغير x_2 واخراج المتغير S_1 للحل، فنجد :

	X_0	x_1	x_2	x_3	S_1	R_1	R.S.
X_0	1	-3/7	0	0	40/7	-4/7 + M	192/7
x_2	0	1/7	1	0	3/7	-1/7	13/7
X_3	0	5/7	0	1	1/7	2/7	9/7

الجدول (4)

بعد ذلك يجب إخراج المتغير x_3 وإدخال المتغير x_1 للحل ، وهذا يؤدي إلى :

	X_0	x_1	x_2	X_3	S_1	R_1	R.S.
X_0	1	0	0	3/5	29/5	-2/5 + M	141/5
x_2	0	0	1	-1/5	2/5	-1/5	8/5
X_1	0	1	0	7/5	1/5	2/5	9/5

الجدول (5)

وهذا الجدول يعطي الحل الأمثل للمشكلة الأولية .

$$\text{Max } X_0 = 141/5 \quad , \quad x_3 = 0 \quad , \quad x_2 = 8/5 \quad , \quad x_1 = 9/5$$

إن النموذج المقابل لهذه المشكلة الأولية هي :

$$\begin{aligned}
&\text{Min } \ Y_0 = 5y_1 + 2y_2 \\
&\text{S.t.} \\
&\quad y_1 + 2y_2 \geq 5 \\
&\quad 2y_1 - y_2 \geq 12 \\
&\quad y_1 + 3y_2 \geq 4 \\
&\quad\quad y_1 \geq 0
\end{aligned}$$

لنحل النموذج المقابل حسب الطريقة المبسطة :

بما أن المتغير y_2 غير مقيد ، فيجب تعويضه كما تعلمنا سابقاً بالشكل التالي :

$y_2 = y_2^{'} - y_2^{''} \quad ; \quad y_2^{'} \geq 0 \quad , \quad y_2^{''} \geq 0$

فتصبح النموذج المقابل كالآتي :

$$\begin{aligned} &\text{Min} \quad Y_0 = 5y_1 + 2y_2^{'} - 2y_2^{''} \\ &\text{S.t.} \\ &\quad y_1 + 2y_2^{'} - 2y_2^{''} \geq 5 \\ &\quad 2y_1 - y_2^{'} + y_2^{''} \geq 12 \\ &\quad y_1 + 3y_2^{'} - 3y_2^{''} \geq 4 \\ &\quad (y_1 , y_2^{'} , y_2^{''}) \geq 0 \end{aligned}$$

لنكتب هذه المشكلة بالصيغة النموذجية ، كما يلي :

$$\begin{aligned} &\text{Min} \quad Y_0 = 5y_1 + 2y_2^{'} - 2y_2^{''} + 0.S_1 + 0.S_2 + 0.S_3 \\ &\text{S.t.} \\ &\quad y_1 + 2y_2^{'} - 2y_2^{''} - S_1 = 5 \\ &\quad 2y_1 - y_2^{'} + y_2^{''} - S_2 = 12 \\ &\quad y_1 + 3y_2^{'} - 3y_2^{''} - S_3 = 4 \\ &\quad (y_1 , y_2^{'} , y_2^{''}, S_1 , S_2 , S_3) \geq 0 \end{aligned}$$

يلاحظ أنه لا يمكننا البدء بالحل الصفري كحل أولي أساسي للطريقة المبسطة ، لذلك نضيف المتغيرات الاصطناعية ، فتصبح المشكلة كما يلي :

$$\begin{aligned} &\text{Min} \quad Y_0 = 5y_1 + 2y_2^{'} - 2y_2^{''} + 0.S_1 + 0.S_2 + 0.S_3 + \\ &\qquad\qquad + MR_1 + MR_2 + MR_3 \\ &\text{S.t.} \\ &\quad y_1 + 2y_2^{'} - 2y_2^{''} - S_1 + R_1 = 5 \\ &\quad 2y_1 - y_2^{'} + y_2^{''} - S_2 + R_2 = 12 \\ &\quad y_1 + 3y_2^{'} - 3y_2^{''} - S_3 + R_3 = 4 \\ &\quad (y_1 , y_2^{'} , y_2^{''}, S_1 , S_2 , S_3 , R_1 , R_2 , R_3) \geq 0 \end{aligned}$$

من أجل سهولة الكتابة نضع

$$y_2 = y_2^{'} \qquad \& \qquad y_3 = y_2^{''}$$

و لنرتب البيانات في الجدول التالي :

	Y_0	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	R.S.
Y_0	1	-5	-2	2	0	0	0	-M	-M	-M	0
R_1	0	1	2	-2	-1	0	0	1	0	0	5

R_2	0	2	-1	1	0	-1	0	0	1	0	12
R_3	0	1	3	-3	0	0	-1	0	0	1	4

الجدول (1)

نضرب كل من أسطر R_1 , R_2 , R_3 بـ M ونجمعها إلى سطر الدالة الهدف Y_0 ، فنجد :

	Y_0	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	R.S.
Y_0	1	- 5+4M	- 2+4M	2-4M	-M	-M	-M	0	0	0	21M
R_1	0	1	2	-2	-1	0	0	1	0	0	5
R_2	0	2	-1	1	0	-1	0	0	1	0	12
R_3	0	1	3	-3	0	0	-1	0	0	1	4

الجدول (2)

باجراء خطوات المشكلة المبسطة ، وبعد خمسة تكرارات ، نحصل على الحل الأمثل للمشكلة المقابل :

	Y_0	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	R.S.
Y_0	1	0	0	0	-9/5	-8/5	0	9/5-M	8/5-M	-M	141/5
S_3	0	0	0	0	-7/5	1/5	1	7/5	-1/5	-1	3/5
y_3	0	0	-1	1	2/5	-1/5	0	-2/5	1/5	0	2/5
y_1	0	1	0	0	-1/5	-2/5	0	1/5	2/5	0	29/5

الجدول (3)

من الجدول (3) نجد الحل الأمثل للمشكلة المقابل وهو :

$$\text{Min } Y_0 = 141/5 \ , \ y_2 = -2/5 \quad \Leftarrow \quad y_2' = y_2 = 0 \ , \ y_2'' = y_3 = 2/5 \ , \ y_1 = 29/5$$

يلاحظ من هذا المثال ، أنه من أجل الحل الأمثل للمسألتين الأولية والمقابل يكون :

$$\text{Max } X_0 = \text{Min } Y_0 = 141/5$$

ثانياً: العلاقة بين القيم المثلى للمتغيرات في المشكلتين الأولية والنموذج المقابل :

لو عدنا إلى المثال السابق ، ولاحظنا أن المتغيرات الأساسية في الحل المبدئي للمشكلة الأولية هي S_1 و R_1 . إن المتغير المرافق المقابل للقيد الذي يحوي S_1 هو المتغير y_1 ، والمتغير المرافق المقابل للقيد الذي يحوي R_1 هو المتغير y_2 . الآن ، لو نظرنا إلى معاملات

في جدول الحل الأمثل للمشكلة الأولية لوجدنا X_0 في سطر دالة الهدف R_1 و S_1المتغيرين :

متغيرات الحل الأساسي المبدئي للمشكلة الأولية	S_1	R_1
المعاملات المقابلة في سطر الدالة الهدف في جدول الحل الأمثل	-9/5	$\frac{9}{5}$
المتغيرات المقابل المقابلة لها	y_1	y_2

تعطي مباشرة الحل الأمثل 5 / 29 , 5 / 2- حالياً ، لوجدنا أن القيم Mلو أهملنا للمشكلة المقابل أي $y_2 = -2/5\ ,\ y_1 = 29/5$ ، وهي نفس النتيجة التي نحصل عليها لو تم حل النموذج المقابل بشكل مستقل . هذه النتيجة لا يمكن اعتبارها مصادفة ، لأنه لو نظرنا أيضاً إلى المتغيرات الأساسية في الحل المبدئي للمشكلة المقابل لوجدناها R_3 , R_2 , R_1 في جدول الحل Y_0لوجدنا أن المعاملات المقابلة لهذه المتغيرات في سطر الدالة الهدف الأمثل هي :

متغيرات الحل الأساسي المبدئي للمشكلة الأولية	R_1	R_2	R_3
المعاملات المقابلة في سطر الدالة الهدف Y_0في جدول الحل الأمثل	9/5 - M	8/5 - M	0 – M
المتغيرات المقابل المقابلة لها في المشكلة الأولية	x_1	x_2	x_3

، لوجدنا أن هذه المعاملات تعطي الحل الأمثل للمشكلة Mمرة أخرى ، لو أهملنا الأولية مباشرة $x_3 = 0\ ,\ x_2 = 8/5\ ,\ x_1 = 9/5$. وهي نفس النتيجة التي نحصل عليها عند حل المشكلة الأولية بشكل مستقل . وبشكل مختصر ، نقول أن الحل الأمثل للمشكلة الأولية (المقابل) يعطي مباشرة الحل الأمثل للنموذج المقابل . ويمكن أن نعبر عن ذلك وفقاً للقاعدة الآتية :

1. إذا كانت المتغيرات في النموذج المقابل تقابل متغيرات الفروق في الحل المبدئي في المشكلة الأولية ، فإن القيم المثلى لهذه المتغيرات في النموذج المقابل يُحصل عليها مباشرة من معاملات متغيرات الفروق (تلك التي في سطر دالة الهدف) في جدول الحل الأمثل للمشكلة الأولية .
2. إذا كانت المتغيرات للنموذج المقابل تقابل متغيرات اصطناعية في الحل المبدئي في المشكلة الألوية ، فإن القيم المثلى لهذه المتغيرات للنموذج المقابل يُحصل عليها مباشرة من معاملات المتغيرات الاصطناعية تلك التي في سطر دالة الهدف من جدول الحل الأمثل للمشكلة الأولية بعد إهمال M .

حالة تطبيقية 22 :

تم ايجاد الحل الأمثل للمشكلة الآتية في الفقرات السابقة :

$$\text{Max } X_0 = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$
$$\text{S.t.}$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 430$$
$$3x_1 + 2x_3 \le 460$$
$$x_1 + 4x_2 \le 420$$
$$(x_1, x_2, x_3) \ge 0$$

حيث كانت المتغيرات الأساسية في الحل المبدئي حسب الطريقة المبسطة هي S_3 , S_2 , S_1 ، وهي متغيرات الفروق في القيود الأول والثاني والثالث على الترتيب . وكان جدول الحل الأمثل لهذه المشكلة كالآتي :

	X_0	X_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	R.S.
X_0	1	4	0	0	1	2	0	1350
x_2	0	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	100
x_3	0	3/2	0	1	0	1/2	0	230
S_3	0	2	0	0	-2	1	1	20

ويتضح من الجدول ، إن الحل الأمثل للمشكلة الأولية هو :

$$\text{Max } X_0 = 1350 \ , \ S_3 = 20 \ , \ S_1 = S_2 = 0 \ , \ x_3 = 230 \ , \ x_2 = 100 \ , \ x_1 = 0$$

إن النموذج المقابل للمشكلة الأولية المعطاة في هذا المثال هي :

$$\text{Min } Y_0 = 430y_1 + 460y_2 + 420y_3$$
$$\text{S.t.}$$
$$y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 3$$
$$2y_1 + 4y_3 \ge 2$$
$$y_1 + 2y_2 \ge 5$$
$$(y_1, y_2, y_3) \ge 0$$

يمكن الحصول على الحل الأمثل لهذه المشكلة مباشرة من جدول الحل الأمثل للمشكلة الأولية كما يلي :

$$\text{Min } Y_0 = 1350 \ , \ S_2 = S_3 = 0 \ , \ S_1 = 4 \ , \ y_3 = 0 \ , \ y_2 = 2 \ , \ y_1 = 1$$

يمكن التأكد من هذا الحل ، وذلك بحل النموذج المقابل بتطبيق الطريقة المبسطة .

تمارين

1 - أوجد حلول البرامج الخطية الآتية بطريقة السمبلكس (الطريقة المبسطة).

a) $\text{Max } Z = -2x_1 + x_2 - 3x_3$

S.t.

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 \le 7$$
$$-x_1 + x_2 - x_3 \le -1$$
$$(x_1, x_2, x_3) \ge 0$$

b) $\text{Min } z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$

S.t.

$$x_1 + x_2 - x_3 \ge 4$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \ge 5$$
$$(x_1, x_2) \ge 0$$

c) $\text{Max } Z = x_1 + x_2 + 3x_3$

S.t.

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 \le 5$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$$
$$(x_1, x_2, x_3) \ge 0$$

d) $\text{Max } Z = x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4$

S.t.

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 5$$
$$-x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \le -6$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \ge 0$$

2- أوجد حلول البرامج الخطية الآتية بطريقة M. الكبيرة

a) $\text{Min } z = 2x_1 + 3x_2$

S.t.

$$4x_1 + x_2 \ge 2$$
$$3x_1 + 6x_2 \ge 4$$
$$x_1 + x_2 \ge 5$$
$$(x_1, x_2) \ge 0$$

b) $\text{Min } z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$

S.t.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 2 \\ x_1 + 6x_2 + 4x_3 &\geq 12 \\ x_2 + 2x_3 &\geq 8 \\ (x_1 , x_2 , x_3) &\geq 0 \end{aligned}$$

c) $\text{Min } z = 4x_1 + 6x_2$

S.t.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\geq 10 \\ x_1 + 2x_2 &= 8 \\ 3x_1 + 6x_2 &\leq 14 \\ (x_1 , x_2) &\geq 0 \end{aligned}$$

3 - أوجد حل البرنامج الخطي بطريقة المرحلتين ثم بطريقة M. الكبيرة

$\text{Max } Z = -x_1 - 2x_2 + x_3$

S.t.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &\geq 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &\geq 6 \\ x_1 + x_3 &\leq 12 \\ (x_1 , x_2 , x_3) &\geq 0 \end{aligned}$$

4 - أوجد حل البرنامج الخطي التالي باستخدام طريقة M الكبيرة ، ومن ثم أوجد حل البرنامج المرافق من جدول الحل الأمثل .

$\text{Max } Z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3$

S.t.

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 30 \\ x_1 - 5x_2 - 6x_3 &\leq 40 \\ (x_1 , x_2 , x_3) &\geq 0 \end{aligned}$$

5 - لنفرض أن المعاملات في المشكلة السابقة ("4") لـ x_2 تكون : $(5-\alpha , -5+\alpha)$ بدلاً من (5 , -5). حيث α ثابت غير سالب.

أوجد قيم α التي لا تؤدي إلى أي تغيير في الحل الأمثل للمشكلة ("4") .

6 - لنفرض أن الطرف الأيمن للقيود في المشكلة ("4") أصبح : $(30+\alpha , 40-\alpha)$ ، حيث α ثابت غير سالب. ولنفرض أن معاملات دالة الهدف أصبحت

أوجد في هذه الحالة قيم α التي تحافظ على حل المشكلة $(5-\alpha\ ,\ 2+\alpha\ ,\ 3+\alpha)$.
("4") كحل أساسي ممكن وأمثل .

7 - أوجد البرنامج الخطي المرافق للبرنامج الخطي التالي :

$$\begin{aligned} &\text{Max}\ \ Z = 3x_1 + 2x_2 \\ &\text{S.t.} \\ &18x_1 + 16x_2 \geq 0.5 \\ &0.1x_1 + 0.2x_2 \leq 4 \\ &x_1 + 30x_2 \leq 50 \\ &14x_1 + x_2 \geq 0.1 \\ &x_1 + 0.05x_2 \leq 6 \\ &(x_1\ ,\ x_2) \geq 0 \end{aligned}$$

ثم أوجد حل البرنامج الخطي المرافق الناتج بطريقة السمبلكس .استنتج حل هذا البرنامج المعطى مباشرة من جدول الحل الأمثل للبرنامج المرافق .

8 - لتكن لدينا مشكلة البرمجة الخطية الآتية :

$$\begin{aligned} &\text{Min}\ \ z = 3x_1 + 2x_2 \\ &\text{S.t.} \\ &3x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ &2x_1 + 4x_2 \geq 1 \\ &x_1 + x_2 \geq 3 \\ &(x_1\ ,\ x_2) \geq 0 \end{aligned}$$

المطلوب :

1 - أوجد الحل الأمثل لهذه المشكلة بالطريقة البيانية .

2 - أوجد الحل الأمثل لهذه المشكلة بطريقة السمبلكس مستخدماً طريقة M الكبيرة.

9 - لكن لدينا مشكلة البرمجة الخطية الآتية :

$$\text{Max } Z = x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

$$\text{S.t.}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\le 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 &\le -2 \\ 3x_1 + 2x_3 &= 5 \\ x_2 - x_3 &\ge 1 \\ (x_1, x_2, x_3) &\ge 0 \end{aligned}$$

i

المطلوب :

1 - أوجد الحل الأمثل لهذه المشكلة بالطريقة التي تراها مناسبة .

2 - أكتب البرنامج المرافق لهذه المشكلة واستنتج حلّه .

10 - لديك مشكلة البرمجة الخطية الآتية :

$$\text{Max } Z = 10x_1 + 5x_2$$

$$\text{S.t.}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 9x_2 &\le 27 \\ 8x_1 + 6x_2 &\le 48 \\ -4x_1 + 6x_2 &\ge -12 \\ 8x_1 + 12x_2 &= 24 \\ (x_1, x_2) &\ge 0 \end{aligned}$$

المطلوب :

1. **أوجد الحل الأمثل لهذه المشكلة :**
   - **بالطريقة البيانية .**
   - **بالطريقة المبسطة (السمبلكس) .**
2. **اكتب البرنامج الخطي المرافق لهذه المشكلة واستنتج حلّه .**

11 - لديك مشكلة البرمجة الخطية الآتية :

$$\text{Max } Z = -5x_1 + 6x_2$$

$$\text{S.t.}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 &\ge -5 \\ 5x_1 - 3x_2 &\le 3 \\ x_1 + 2x_2 &\le 6 \\ (x_1, x_2) &\ge 0 \end{aligned}$$

المطلوب :

1. **أوجد الحل الأمثل لهذه المشكلة :**

- **بالطريقة البيانية .**
- **بالطريقة الجبرية.**
- **بالطريقة المبسطة (السمبلكس).**

2. **اكتب البرنامج الخطي المرافق لهذه المشكلة واستنتج حلّه .**

الفصل الرابع

مشكلة النقـل

Transportation Problem

مقدمة :

تظهر مشكلات النقل في الحياة العملية بصورة متكررة ، فكثيراً ما يرى المرء شاحنات لنقل البضائع أو ناقلات النفط تسير عبر طرق مختلفة من مواقع عديدة لإيصال هذه المادة الحيوية إلى المستهلك الذي يمكن أن يوجد في أماكن متعددة .

تعد طريقة النقل إحدى الطرق الخاصة في البرمجة الخطية ، والهدف من استخدامها هو نقل الموارد من مصادر إنتاجها أو توفرها المختلفة إلى أماكن استخدامها أو الحاجة إليها ، وذلك بأقل كلفة ممكنة . إن لكل مركز تصدير سعة خاصة به ، ولا يستطيع تزويد كميات من المادة أكثر من الطاقة المحددة له . كما أن لكل مركز استيراد حاجة محددة يطلبها ، وإنه لا يستطيع استهلاك كميات إضافية . إن نقل أي مادة من مركز تصدير إلى مركز استهلاك يرافقه كلف ، والحل الأمثل يحدد الحد الأدنى لكلفة نقل المواد في حدود المتاح والمطلوب .

في سنة لقد وضعت الصيغة الأولى لطريقة النقل من قبل العالم هيتشكوك Hitchcok **بعد ذلك حتى وصلت إلى صيغتها** 1941Koopmans **، ثم أضاف إليها العالم كوبمانز المعروفة في إطار البرمجة الخطية بواسطة العالم دانتزج سنة** 1953 **.**

المبحث الاول
تعريف مشكلة النقل

يمكن أن تعرض مشكلة النقل على الشكل النموذجي التالي ، بالرغم من أن تطبيقاتها أوسع بكثير كما سنرى : هناك كميات $a_i \ (i=1,2,\ldots,m)$ **من مادة معينة (بترول – قمح – قطن ...) متوفرة في مراكز تصدير** $O_i \ (i=1,2,\ldots,m)$ **، يراد نقلها بأقل كلفة ممكنة**

إلى مراكز استيراد $D_j\ (j=1,2,\ldots,n)$ ، حيث يطلب المركز D_j الكمية b_j من هذه المادة ونعرف أن كلفة نقل الواحدة (طن – كلغم – متر مكعب..) من المصدر O_i إلى . المورد D_j هي C_{ij} .

سنفرض الآن أن :

$$a = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = b \qquad (1)$$

أي أن كمية ما هو مطلوب تساوي تماماً كمية ما هو متوفر . في هذه الحالة ، نقول أن مشكلة النقل متوازنة، ويمكن تمثيلها في الجدول التالي :

مراكز الاستيراد / مراكز التصدير	D_1	D_2	….	D_j	….	D_n	الكميات المتوفرة
O_1				:			a_1
O_2				:			a_2
:				:			:
:				:			:
O_i	……………...			C_{ij}	……….		a_i
:				:			:
:				:			:
O_m				:			a_m
الكميات المطلوبة	b_1	b_2	….	b_j	….	b_n	a / b

المطلوب في مشكلة النقل هو تعيين الكميات x_{ij} التي سنرسلها من المصادر O_i إلى الموارد D_j بحيث تكون كلفة النقل أصغرية .

إن الكميات المنقولة هي كميات غير سالبة (أي $x_{ij} \geq 0$) وتحقق الشروط الآتية :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad ; \quad i=1,2,\ldots,m \qquad (2)$$

مساواة تعبر عن كون ما يخرج من كل مصدر O_i هو تماماً الكمية a_i mوهي المتوفرة فيه .

و يكون أيضاً

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad ; \quad j=1,2,\ldots,n \qquad (3)$$

مساواة تعبر عن كون ما يصل إلى المورد D_j هو تماماً الكمية b_j المطلوب nوهي فيه .

، ولكن المساواة : $m + n$إن العدد الكلي لهذه الشروط هنا هو

$$\sum_{i} \sum_{j} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

. إن هذه المساواة تجعل (3) و (2) نستنتجها من الشروط (1)والتي تعبر عن الشروط الخطية المستقلة فقط $m + n - 1$.

كما أن كلفة نقل الكميات x_{ij} تعطى بالعلاقة :

$$z = \sum_{i} \sum_{j} C_{ij} \; x_{ij} \qquad (4)$$

وهي تابع خطي يجب أن نجعله أصغرياً . وبالتالي فإننا نجد أنفسنا أمام برنامج خطي من الشكل :

$$\begin{aligned}
&\text{Min} \quad z = \sum_{i} \sum_{j} C_{ij} \, x_{ij} \\
&\text{S.t.} \\
&\quad \sum_{j} x_{ij} = a_i \qquad ; \qquad i = 1, 2, \dots, m \qquad (5) \\
&\quad \sum_{i} x_{ij} = b_j \qquad ; \qquad j = 1, 2, \dots, n \\
&\quad x_{ij} \geq 0 \qquad ; \qquad \forall\, i, j
\end{aligned}$$

ويمكن حل هذا البرنامج الخطي بطريقة السمبلكس . إلا أن الطريقة الخاصة بالنقل هي أسهل في حل ومعالجة مشكلات النقل .

ملاحظة 1 :

افترضنا سابقاً أن الكمية المتوفرة في مراكز التصدير O_i تساوي الكمية المطلوبة في مراكز الاستيراد D_j ، أي :

$$a = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = b$$

ويمكن دائماً جعل الشرط محققاً دون فقدان عمومية مشكلة النقل ، وبالفعل إذا كان $a > b$ فلا يمكن تصريف كل ما هو متوفر في مراكز التصدير O_i . نفترض عندئذ أن هناك مركز استيراد وهمي D_0 يمثل مستودعات مراكز التصدير O_i التي ستحتفظ بالفائض الذي يساوي $b_0 = a - b$ والذي نعتبره طلباً لمركز الاستيراد الوهمي D_0 ، ونحصل من جديد على المساواة (1) بجمع b_j $(j = 0, 1, \dots, n)$. ويمكن أن نفترض عندئذ أن $C_{i0} = 0$ من أجل $i = 1, 2, \dots, m$.

وإذا وجدنا لـ x_{i0} قيمة موجبة في الحل النهائي، فهذا يعني أن مركز التصدير O_i سيرسل كل ما هو متوفر لديه ماعدا الكمية x_{i0} التي يحتفظ بها.

فلا يمكن تـأمين كـل مـا هـو مطلـوب فـي مراكـز $a < b$ وبطريقـة مشـابهة ، إذا كـان
الاستيراد D_j ، نفترض عندئذ مركز تصـدير إضـافي وهمـي O_0 سـعته $a_0 = b - a$ يعوض
من أجل C_{0j} ونعتبر . هذا النقص $j = 1 , 2, ... , n$.

وإذا وجدنا لـ x_{0j} قيمـة موجبـة فـي الحـل النـهـائي ، فهـذا يعنـي أن مركـز الاستيراد D_j
سينقص من طلب الكمية x_{0j} التي لا يمكن تأمينها .

ملاحظة 2 :

، يعبر عن (5) لكتابـة البرنـامج الخطـي المرافـق للبرنـامج الخطـي الممثـل لمشـكلة النقـل
من القيود، والمجاهيل β_j المقابلـة للمجموعـة (2) المجاهيل α_i المقابلة للمجموعة الأولى
من القيود . فيكون البرنامج الخطي المرافق هو التالي : (3) الثانية

$$\text{Max } z = \sum_{i=1}^{m} a_i \,\alpha_i + \sum_{j=1}^{m} b_j \,\beta_j$$

$$\text{S. t.}$$

$$\alpha_i + \beta_j \le C_{ij}$$

مـن الواضـح أننـا لا نفتـرض شـرط عـدم السـلبية علـى الكميـات $\alpha_i \, , \beta_j$ ، لأنـهـا تقابـل
متساويات .

وفي الحل النهائي للبرنامجين يجب أن يكون :

المجموعة الأولى $\alpha_i + \beta_j = C_{ij}$ إذا كانت x_{ij} من مجاهيل القاعدة .

المجموعة الثانية $\alpha_i + \beta_j \le C_{ij}$ إذا كانت x_{ij} من مجاهيل خارج القاعدة .

المبحث الثاني

طريقة حل مشكلة النقل

يمكن تلخيص إيجاد الحل الأمثل لمشكلة النقل بالخطوات الآتية :

1 - إعطاء حل أساسي (مبدئي) ممكن للمشكلة : يراعى فيه تحقيق التوازن بين المطلوب والمتاح . كما يجب أن يكون عدد مجاهيل القاعدة في هذا الحل المبدئي بعدد الشروط الخطية ، أي $m + n - 1$ **. ويمكن إيجاد حل مبدئي بعدة طرائق ، نذكر منها : طريقة الركن الشمالي الغربي** North - West Corner Method – **طريقة الكلفة الأقل** Least Cost Method – **طريقة فوجل التقريبية** (Vogel's Approximation Method) **. وبحساب كلف الحل المبدئي ، يمكن الانتقال إلى الخطوة الثانية .**

2 - اختبار مثالية الحل : لاختبار مثالية الحل ، يتم اختبار الخلايا الفارغة التي لم تستخدم في الحل لمعرفة مدى إمكانية استخدامها وأثر ذلك في تخفيض الكلف . ولاختبار مثالية الحل ، يمكن استخدام عدة طرائق ، منها طريقة الحجر المتحرك Stepping Stone Method **و طريقة التوزيع المعدلة** The Modified Distribution Method **.**

3 - الانتقال إلى حل أفضل : ويتم باختيار الخلية الفارغة التي يمكن أن توفر أكثر من غيرها فيما لو استخدمت في الحل ، وبهذا نكون قد حصلنا على حل أساسي جديد ، ونعود للخطوة الثانية ، وهكذا حتى نحصل على الحل الأمثل .

إيجاد حل مبدئي ممكن لمشكلة النقل :

لتسهيل طريقة إيجاد الحل المبدئي الممكن لمشكلة النقل ، يفضل تمثيلها بجدول كالتالي :

مراكز استيراد / مراكز التصدير	D_1	D_2	….	D_j	….	D_n	الكميات المتوفرة
O_1	C_{11}	C_{12}	….	C_{1j}	….	C_{1n}	A_1
O_2	C_{21}	C_{22}	….	C_{2j}	….	C_{2n}	A_2
: :	: :			: :		: :	: :
O_i	C_{i1}		….	C_{ij}	….	C_{in}	a_i
: :	: :			: :		: :	: :
O_m	C_{m1}			C_{mj}		C_{mn}	a_m
الكميات المطلوبة	b_1	b_2	….	b_j	….	b_n	a / b

يلاحظ وضع الكلفة C_{ij} **في الزاوية العليا اليسرى من المربع المقابل لها . ومن أجل شرح طريقة إيجاد حل مبدئي ممكن لمشكلة النقل ، نتناول الطرائق الثلاث ف المباحث اللاحقة :**

المبحث الثالث

طريقة الركن الشمالي الغربي

North -West Corner Method

لتحديد خطوات حل مشكلة النقل بطريقة الركن الشمالي الغربي نفرض الحالة التالية:

حالة تطبيقية 23 :

تسعى احدى المنظمات التي تواجه مشكلة نقل كميات معلومة من أربع مراكز تصدير (m = 4) **بكلفة موضحة في الجدول التالي :** (n = 6) **إلى ستة مراكز استيراد**

مراكز	D1	D2	D3	D4	D5	D6	الكميات

استيراد مراكز تصدير							المتوفرة
O1	2 30	1 20	2	3	2	5	50
O2	3	2 30	2 10	4	3	4	40
O3	3	5	4 10	2 40	4 10	1	60
O4	4	2	2	1	2 20	2 11	31
الكميات المطلوبة	30	50	20	40	30	11	**180**

نبدأ الحل في هذه الطريقة لإيجاد حل أولي ممكن للبرنـامج المذكور في المثال أعلاه كمـا يلـي :

نبدأ من المربع الشمالي الغربي (العلوي الأيسر) ، ونمرر فيه أكبر كميـة ممكنـة (فـي مثالنا $x_{11} = 30$) . ثم نحاول الانتقال نحو اليمين ، فنمرر فيه أكبر كميـة ممكنـة (في مثالنـا $x_{12} = 20$.)

ثم نحاول الانتقال نحو اليمين ، فإذا لم نستطع (وهي الحالة في مثالنا) نهبط إلى المربع الأسفل ، فنمرر فيه أكبر كمية ممكنة(في مثالنا $x_{22}=30$).

ثم نحاول الانتقال نحو اليمين ، وهكذا، فنحصل على ما يشبه الدرج الذي يهبط من اليسار إلى اليمين ، لذلك تسمى هذه الطريقة بطريقة الدرج .

يلاحظ أن عدد المربعات التي نشغلها مساوياً (m + n - 1) ، وهي تسعة في مثالنا .

إن كلفة الحل المبدئي الممكن الذي بدأنا به هي :

$$z_1 = 30\times 2 + 20\times 1 + 30\times 2 + 10\times 2 + 10\times 4 + 40\times 2 +$$
$$+ 10\times 4 + 20\times 2 + 11\times 2 = 382$$

وهذا الحل يعني إرسال 30 واحدة من O_1 إلى D_1 و 20 واحدة من O_1 إلى D_2 و 30 واحدة من O_2 إلى D_2 ...الخ

المبحث الرابع

طريقة الكلفة الأقل Least Cost Method

تعد هذه الطريقة أفضل من طريقة الركن الشمالي الغربي ، لأنها تأخذ بعين الاعتبار المربعات ذات الكلفة الأقل ، وهذا هو هدفنا دائماً في حل مشكلات النقل . ولكي نحصل على الحل المبدئي بهذه الطريقة ، نتبع الخطوات الآتية :

- يبدأ بتزويد المربع ذا الكلفة الأقل في المشكلة ككل ، ونزود هذا المربع بالطلبية التي يحتاج من المخزون المقابل لهذا المربع .
- يتابع ملء المربعات ذات الكلفة الأقل بالتتابع إلى أن نزود جميع مراكز الاستيراد من المصادر المتوفرة .

حالة تطبيقية 24 :

نفرض مشكلة نقل ممثلة بالجدول التالي:

مراكز الاستيراد / مراكز التصدير	D_1	D_2	D_3	D_4	الكميات المتوفرة
O_1	2	3	7	11 150	150
O_2	0 100	12	5	6 25	125
O_3	14	1 20	3 55	9	75
O_4	10	2	5 25	8 25	50
	100	20	80	200	400

و هي تعبر عن نقل كميات من أربعة مراكز تصدير إلى أربعة مراكز استيراد، أي: $m = 4$, $n = 4$. باستخدام طريقة الكلفة الأقل نجد الحل المبدئي الموضح في الجدول أعلاه.

يلاحظ أن عدد المربعات المشغولة في هذا الحل المبدئي مساوية لـ $m + n - 1 = 7$. و أن كلفة هذا الحل المبدئي هي :

$$z_1 = 100\times 0 + 20\times 1 + 55\times 3 + 25\times 5 + 25\times 5 +$$
$$+ 150\times 11 + 25\times 6 + 25\times 8 = 2310$$

ملاحظة 1 :

يلاحظ أنه كان لدينا الخيار بين مربعين في العمود الثالث كلفة النقل في كل منهما مساوية 5 نفسها . ولقد اخترنا في هذا المثال المربع (4 , 3) ونحتاج إلى تمرير الكمية 25

لأصبح عدد المربعات المشغولة (3 , 2)، فحصلنا على الحل . بينما لو اخترنا المربع فقط . وبالتالي نحتاج إلى إضافة مربع آخر نمرر فيه الكمية صفر ، وفي الوقت 6مساوية نفسه تكون كلفة النقل $z_1 = 2360$ ، أي أكبر من الكلفة التي حصلنا عليها . لذلك ، كان اختيارنا للمربع (4 , 3). موفقاً ، وأعطى حلاً أفضل

المبحث الخامس
طريقة الكلفة الفرصية (فوجل التقريبية)

Vogel's Approximation Method

تعد هذه الطريقة أفضل من سابقتيها ، وكثيراً ما تؤدي إلى الحل الأمثل أو قريباً منه.

وللوصول للحل المبدئي بهذه الطريقة نتبع الخطوات الآتية :

1. يحسب الفرق بين أقل كلفتين (غير متساويتين) في كل سطر وكل عمود. وهنا لا يصح أن يكون الفرق صفراً (إذا توافق في أي عمود أو سطر كلفتين متساويتين لا يؤخذ الفرق بينهما) .
2. نأخذ السطر أو العمود ذا الفرق الأكبر .
3. نختار المربع الأقل في السطر أو العمود المختار ، ونعمل على تلبية طلبية مركز الاستيراد الذي يقع فيه هذا المربع من المصدر الذي يقابله .
4. نشطب السطر أو العمود الذي فرغ أو تمت تلبية طلبيته .
5. نعيد حساب الفرق مرة أخرى لكل من الأعمدة والصفوف ، ونكرر العملية السابقة إلى أن نلبي جميع طلبيات مراكز التوزيع من المصادر المتاحة .

حالة تطبيقية 25 :

ولنر كيفية إيجاد الحل المبدئي وفق طريقة $n = 4 \;,\; m = 4$ لنأخذ المثال السابق حيث فوجل التقريبية .

مراكز الاستيراد / مراكــز التصدير	D_1	D_2	D_3	D_4	الكميات المتوفرة	فرق الأسطر
O_1	2	3 20	7 5	11 125	150	1 4 4 4
O_2	0 100	12	5	6 25	125	5 1 1 1
O_3	14	1	3 75	9	75	2 2 6 -
O_4	10	2	5	8 50	50	3 3 3 3
الكميات المطلوبة	100	20	80	200	400 400	
فرق الأعمدة	2 - - -	1 1 - -	2 2 2 2	2 2 2 2		

يلاحظ أن عدد المربعات المشغولة مساوياً إلى $m + n - 1 = 7$ **. وتكون كلفة النقل وفق الحل المبتدئي الذي حصلنا عليه بطريقة فوجل هي :**

$$z_1 = 20\times3+5\times7+125\times11+100\times0+\ 25\times6+75\times3+$$
$$+\ 50\times8\ =\ 2245$$

وهي أقل من الكلفة التي حصلنا عليها في طريقة الكلفة الأقل .

ملاحظة 2 :

إذا فرغ السطر وتمت تلبية العمود في الوقت نفسه ، فإننا نشطب أحدهما فقط ، ونعتبر الآخر (فيه صفر إذا كان سطراً أو يلزمه صفر إذا كان عموداً) . كما أنه لا نستخدم أي سطر (أو عمود) فيه صفر (أو يلزمه صفر) عند حساب فرق الأسطر (أو الأعمدة) في الخطوة الآتية .

والآن ، بعد إيجاد الحل المبدئي ، ننتقل إلى الخطوة الثانية ، وهي السؤال: هل هذا الحل هو حل أمثل أم لا ؟ . إذا كان حلاً أمثلياً نتوقف ، وإلا نبحث عن حل أفضل .وهذا ما سنناقشه في المبحث التالي.

المبحث السادس

إيجاد الحل الأمثل لمشاكل النقل

يتناول هذا المبحث كيفية الوصول إلى الحل الأمثل لمشكلة النقل فبعد التوصل الى إيجاد الحل المبدئي ، سيتم البحث عن الحل الأمثل لمشاكل النقل من خلال الطرائق الآتية :

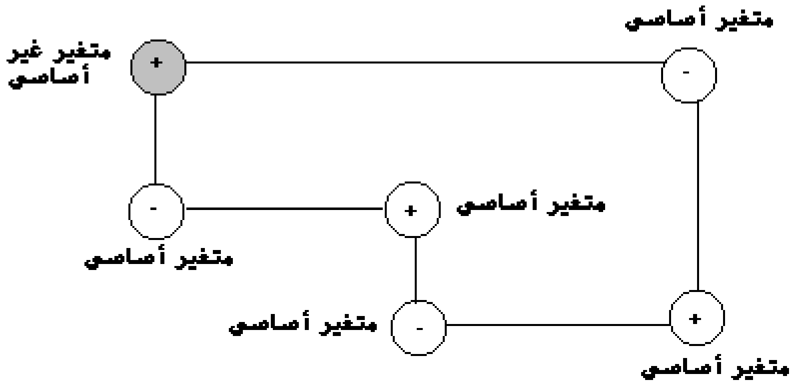
1. **طريقة القفز على الحجر** Stepping Stone Method
2. **الطريقة طريقة التوزيع المعدل** Modified Distribution Method

أولاً: طريقة القفز على الحجر المتنقل(القفز على الصخور)

للوصول للحل الأمثل بهذه الطريقة نتبع الخطوات الآتية :

1. **نجد الحل المبدئي بإحدى الطرائق الثلاثة السابقة الذكر ، وغالباً ما يكون بطريقة فوجل .**
2. **حساب الكلفة الإجمالية لمشكلة النقل وفق هذا الحل المبدئي .**
3. **تحديد المتغيرات الأساسية من المتغيرات غير الأساسية من جدول الحل المبدئي .**
4. **تحديد الكلفة غير المباشرة من خلال إيجاد المسارات المغلقة . حيث أن كل مسار مغلق تكون بدايته ونهايته متغير غير أساسي ، ويتكون من خطوط أفقية وعموديةأركانها متغيرات أساسية.**
5. **إذا تصادف وجود متغيرين أساسيين في طريق المسار ، فإننا نعرج عن المتغير الأساسي غير الركني . وبشكل عام ، يأخذ المسار المغلق الشكل** (1)

تحسب الكلفة غير المباشرة لكل متغير غير أساسي ، وذلك بإعطاء كلفة المتغير غير الأساسي إشارة موجبة ، وكلفة المتغيرات الأساسية نعطيها إشارات متناوبة سالبة ثم موجبة وهكذا ... نفرض أننا ندخل هذا المتغير غير الأساسي مع مجموعة المتغيرات الأساسية ، ولنعطه قيمة الواحد . إذا كانت الكلفة غير المباشرة لكل من المتغيرات الأساسية



موجبة أو صفر ، فإن هذا يعني أن الحل الذي حصلنا عليه هو حل أمثل ونتوقف . أما إذا كانت إحدى الكلف غير المباشرة على الأقل سالبة ، فإننا لا بد أن نطور الحل باختيار أحد المتغيرات غير الأساسية ليصبح أساسي ، وخروج أحد المتغيرات الأساسية .

الشكل (1)

ملاحظة 3 :

لتحديد المتغير الأساسي الداخل ، نأخذ المتغير غير الأساسي الذي حقق أكثر سلبية في الكلفة غير المباشرة . ولكي نجعل تحسن الحل أفضل ما يمكن ، فإننا نحاول أن نمرر فيه أكبر كمية ممكنة .

حالة تطبيقية 26 :

يمثل الجدول التالي كلفة نقل بضائع من المصادر O_i حيث $i=\overline{1,4}$ إلى مراكز التوزيع D_j حيث $j=\overline{1,3}$. أوجد الحل الأمثل باستخدام طريقة الحجر المتنقل (المسار المتعرج) .

مراكز الاستيراد مراكز التصدير	D_1	D_2	D_3	الكميات المتوفرة
O_1	2	4	0	150
O_2	3	1	5	200
O_3	6	2	4	325
O_4	1	7	9	25
الكميات المطلوبة	180	320	200	700

الحل :

لإيجاد الحل المبدئي باستخدام طريقة الكلفة الادنى، نرتب المشكلة كما في جدول التالي :

مراكز الاستيراد مراكز التصدير	D_1	D_2	D_3	الكميات المتوفرة
O_1	2	4	0 150	150
O_2	3	1 200	5	200
O_3	6 155	2 120	4 50	325
O_4	1 25	7	9	25
الكميات المطلوبة	180	320	200	700

يلاحظ أن عدد المربعات المشغولة مساوياً لـ $m + n - 1 = 6$ **. والكلفة الإجمالية للنقل وفق هذا الحل المبدئي هي :**

$$z_1 = 0\times150 + 1\times200 + 6\times155 + 2\times120 + 4\times50 + 1\times25 = 1595$$

بعد ذلك يجري التأكد من ان الحل الذي تم التوصل اليه هو حلاً أمثل أم لا؟

من اجل ذلك تحدد المتغيرات الأساسية و المتغيرات غير الأساسية ، فنجد :

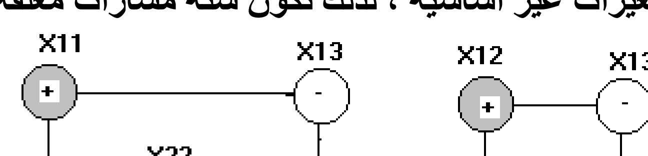
المتغيرات الأساسية هي :

$X_{41}\ ,\ X_{33}\ ,\ X_{32}\ ,\ X_{31}\ ,\ X_{22}\ ,\ X_{13}$

المتغيرات غير الأساسية هي :

$X_{43}\ ,\ X_{42}\ ,\ X_{23}\ ,\ X_{21}\ ,\ X_{12}\ ,\ X_{11}$

لدينا ستة متغيرات غير أساسية ، لذلك نكوّن ستة مسارات مغلقة ، وهي



الشكل (2)

وتحتسب الكلفة غير المباشرة ، فنجد :

كلفة المتغير غير الأساسي x_{11} **يكون :** x_{11} : $2 - 0 + 4 - 6 = 0$

كلفة المتغير غير الأساسي x_{12} **تكون :** x_{12} : $4 - 0 + 4 - 2 = 6$

كلفة المتغير غير الأساسي x_{21} **تكون :** x_{21} : $3 - 1 + 2 - 6 = -2$

كلفة المتغير غير الأساسي x_{23} **تكون :** x_{23} : $5 - 1 + 2 - 4 = 2$

كلفة المتغير غير الأساسي x_{42} **تكون :** x_{42} : $7 - 2 + 6 - 1 = 10$

كلفة المتغير غير الأساسي x_{43} **تكون :** x_{43} : $9 - 4 + 6 - 1 = 10$

يلاحظ أن الكلفة غير المباشرة المقابلة للمتغير غير الأساسي x_{21} **هي مقدار سالب ، وهو وحيد . لذلك ندخل هذا المتغير ، ويصبح من المتغيرات الأساسية ، ونخرج بدلاً منه** x_{31} .

يلاحظ أنه يمكننا أن نمرر الكمية $x_{21} = 155$ $x_{22} = 45$, $x_{32} = 275$, $x_{31} = 0$, .

ويصبح الجدول الجديد كالتالي :

موارد / مصادر	D_1	D_2	D_3	الكميات المتوفرة
O_1	2	4	0 150	150
O_2	3 155	1 45	5	200
O_3	6	2 275	4 50	325
O_4	1 25	7	9	25
الكميات المطلوبة	180	320	200	700

يلاحظ أن كلفة النقل وفق هذا الحل هي :

$$z_2 = 0\times150 + 3\times155 + 1\times45 + 2\times275 + 4\times50 + 1\times25 = 1285 < z_1$$

أي أن هذا الحل أفضل من سابقه .

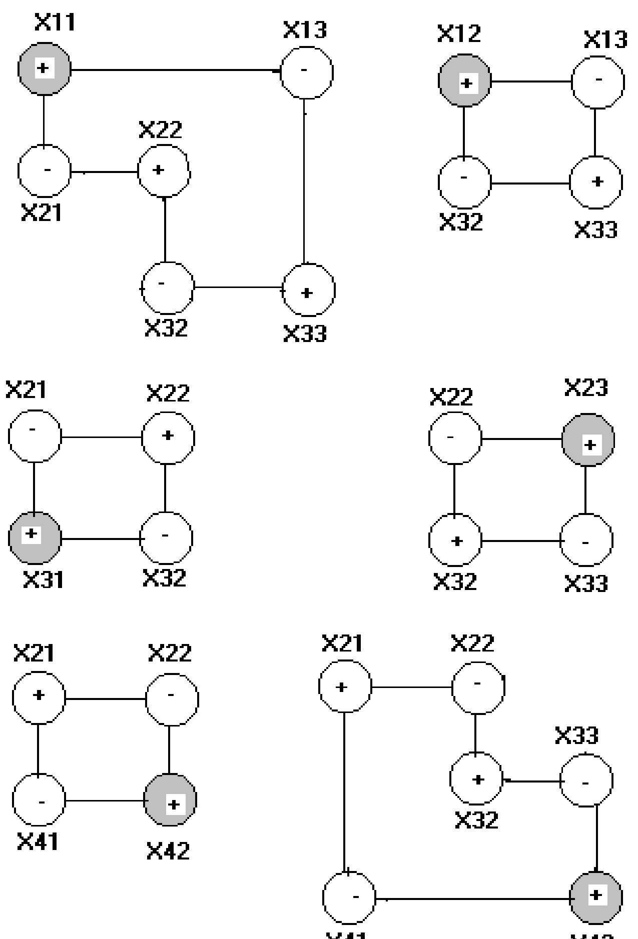
بعد ذلك نطرح السؤال من جديد ، هل الحل الذي حصلنا عليه في الخطوة السابقة هو حل أمثل ؟.

من أجل الإجابة على ذلك ، نحدد المتغيرات الأساسية وغير الأساسية فنجد :

المتغيرات الأساسية هي : x_{13} , x_{21} , x_{22} , x_{32} , x_{33} , x_{41}

المتغيرات غير الأساسية هي : x_{11} , x_{12} , x_{23} , x_{31} , x_{42} , x_{43}

ولنشكل المسارات المغلقة للمتغيرات غير الأساسية الستة :



الشكل (3)

ولنحسب الكلفة غير المباشرة :

كلفة المتغير غير الأساسي x_{11} يكون : $x_{11}: 2 - 0 + 4 - 2 + 1 - 3 = 2$

كلفة المتغير غير الأساسي x_{12} يكون : $x_{12}: 4 - 0 + 4 - 2 = 6$

كلفة المتغير غير الأساسي x_{23} يكون : $x_{23}: 5 - 4 + 2 - 1 = 2$

x_{31} كلفة المتغير غير الأساسي : يكون x_{31} : $6 - 2 + 1 - 3 = 2$

x_{42} كلفة المتغير غير الأساسي : يكون x_{42} : $7 - 1 + 3 - 1 = 8$

x_{43} كلفة المتغير غير الأساسي : يكون x_{43} : $9 - 4 + 2 - 1 + 3 - 1 = 8$

يلاحظ أن الكلفة غير المباشرة من أجل كل متغير غير أساسي هي موجبة. بالتالي ، فإنه لا يمكن أن ندخل أي متغير غير أساسي للقاعدة الأساسية . والحل الذي حصلنا عليه هو حلاً أمثل وكلفة النقل الأصغرية هي التي حصلنا عليها سابقاً $z_2 = 1285$.

ثانياً: طريقة التوزيع المعدلة: Modified Distribution Method

تعد هذه الطريقة طريقة أخرى من طرق إيجاد الحل الأمثل لمشاكل النقل ، وهي مشابهة أيضاً للطريقة السابقة (طريقة الحجر المتنقل) . الفرق الرئيسي بينهما هو كيفية التعامل مع المتغير غير الأساسي في كل خطوة من خطوات الحل . كما أن هذه الطريقة في الحل تعتمد بشكل أساسي على نظرية الترافق .

ولإيجاد الحل الأمثل لمشكلة النقل وفق هذه الطريقة نتبع الخطوات الآتية:

1. نجد الحل المبدئي بإحدى الطرائق المذكورة سابقاً .
2. نحدد المتغيرات الأساسية والمتغيرات غير الأساسية للحل .
3. نقرن بكل سطر i مضروب نسميه u_i ، وبكل عمود j مضروب نسميه ϑ_j ، فيكون : من أجل كل متغير أساسي x_{ij} لدينا :

$$u_i + \vartheta_j = C_{ij} \qquad *$$

حيث C_{ij} الكلفة من O_i إلى D_j .

وبحل هذه $m+n-1$ فإننا نحصل على $m+n-1$ بما أن عدد المتغيرات الأساسية يكون المعادلات يجب أن نوجد قيم u_i , ϑ_j والتي عددها $m + n$. لذلك لا بد لنا من أن نعطي أحد هذه المضاريب قيمة اختيارية ثم نحل هذه المعادلات وفق هذه القيمة .

بعد إيجاد القيم u_i , ϑ_j ، فإنه من أجل كل متغير غير أساسي x_{ij} نحسب الكميات $\overline{C_{ij}} = C_{ij} - u_i - \vartheta_j$. وبشكل مشابه لطريقة الحجر المتحرك . أما إذا كانت إحدى هذه الكميات سالبة ، فإننا يجب إدخال متغير غير أساسي إلى مجموعة المتغيرات الأساسية وإخراج متغير أساسي بدلاً عنه . ويتم اختيار المتغير الأساسي الداخل بنفس الطريقة السابقة .

حالة تطبيقية 27 :

بالعودة للمثال السابق ، اتضح ان الحل المبدئي وفق طريقة الكلفة الأقل كما هو مبين في الجدول التالي :

مراكز استيراد / مراكز تصدير	ϑ_1 D_1	ϑ_2 D_2	ϑ_3 D_3	الكميات المتوفرة
u_1 O_1	2	4	0 150	150
u_2 O_2	3	1 200	5	200
u_3 O_3	6 155	2 120	4 50	325
u_4 O_4	1 25	7	9	25
الكميات المطلوبة	180	320	200	700 700

وكلفة النقل هي : $z_1 = 1595$

المتغيرات الأساسية هي : $x_{41}\ ,\ x_{33}\ ,\ x_{32}\ ,\ x_{31}\ ,\ x_{22}\ ,\ x_{13}$

المتغيرات غير الأساسية هي : $x_{43}\ ,\ x_{42}\ ,\ x_{23}\ ,\ x_{21}\ ,\ x_{12}\ ,\ x_{11}$

المضاريب هي u_i حيث $i=\overline{1,4}$ و ϑ_j حيث $j=\overline{1,3}$.

من أجل متغيرات القاعدة يكون لدينا :

كلفة $x_{13} \leftarrow u_1 + \vartheta_3 = 0$

كلفة $x_{22} \leftarrow u_2 + \vartheta_2 = 1$

كلفة $x_{31} \leftarrow u_3 + \vartheta_1 = 6$

كلفة $x_{32} \leftarrow u_3 + \vartheta_2 = 2$

كلفة $x_{33} \leftarrow u_3 + \vartheta_3 = 4$

كلفة $x_{41} \leftarrow u_4 + \vartheta_1 = 1$

وهي ست معادلات ، فيها سبعة مجاهيل . لحلها نفرض $u_1 = 0$ ، فنجد البقية بحل هذه المعادلات كالتالي :

$$u_1=0\quad ,\quad u_2=3\quad ,\quad u_3=4\quad ,\quad u_4=-1$$
$$\vartheta_1=2\quad ,\quad \vartheta_2=-2\quad ,\quad \vartheta_3=0$$

من أجل المتغيرات غير الأساسية يكون لدينا :

يكون : $\overline{C_{11}} = C_{11}-u_1-\vartheta_1 = 2-0-2 = 0$ كلفة x_{11}

يكون : $\overline{C_{12}} = C_{12}-u_1-\vartheta_2 = 4-0+2 = 6$ كلفة x_{12}

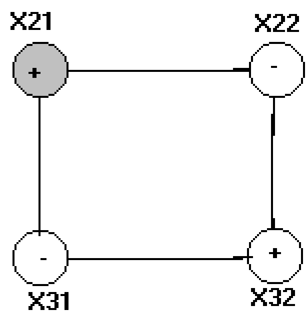
يكون : $\overline{C_{21}} = C_{21}-u_2-\vartheta_1 = 3-3-2 = -2$ كلفة x_{21}

يكون : $\overline{C_{23}} = C_{23}-u_2-\vartheta_3 = 5-3-0 = 2$ كلفة x_{23}

يكون : $\overline{C_{42}} = C_{42}-u_4-\vartheta_2 = 7+1+2 = 10$ كلفة x_{42}

يكون : $\overline{C_{43}} = C_{43} - u_4 - \vartheta_3 = 9+1-0 = 10$ من أجل x_{43}

يلاحظ أن الكمية $\overline{C_{21}} = -2$ هي مقدار سالب ، وبالتالي فإن الحل المبدئي الذي حصلنا عليه ليس حلاً أمثل، ولا بد من تطوير هذا الحل . ومن أجل ذلك نشكل المسار المغلق للمتغير غير الأساسي x_{21}: فنجده من الشكل :



الشكل(4)

ندخل المتغير x_{21} إلى مجموعة المتغيرات الأساسية ، وذلك بأن نعطيه القيمة $x_{21} = 155$ ، ونخرج المتغير x_{31} ، فيصبح متغيراً غير أساسياً . وبالتالي يصبح : $x_{22} = 45$, $x_{32} = 275$: فنحصل على الجدول التالي :

مراكز استيراد / مراكز تصدير	ϑ_1 D_1	ϑ_2 D_2	ϑ_3 D_3	الكميات المتوفرة
u_1 O_1	2	4	0 150	150
u_2 O_2	3 155	1 45	5	200
u_3 O_3	6	2 275	4 50	325
u_4 O_4	1 25	7	9	25
الكميات المطلوبة	180	320	200	700

فتكون كلفة النقل الجديدة هي : $z_2 = 1285 < z_1$

أي أن هذا الحل أفضل من سابقه ، ولكن هل هو الحل الأمثل ؟

من أجل متغيرات القاعدة يكون لدينا :

$x_{13} \leftarrow u_1 + \vartheta_3 = 0$ من أجل

$x_{21} \leftarrow u_2 + \vartheta_1 = 3$ من أجل

$x_{22} \leftarrow u_2 + \vartheta_2 = 1$ من أجل

$x_{32} \leftarrow u_3 + \vartheta_2 = 2$ من أجل

$x_{33} \leftarrow u_3 + \vartheta_3 = 4$ من أجل

$x_{41} \leftarrow u_4 + \vartheta_1 = 1$ من أجل

نفرض $u_1 = 0$ **، ونحل جملة المعادلات ، فنجد :**

$$u_1 = 0 \quad , \quad u_2 = 3 \quad , \quad u_3 = 4 \quad , \quad u_4 = 1$$
$$\vartheta_1 = 0 \quad , \quad \vartheta_2 = -2 \quad , \quad \vartheta_3 = 0$$

من أجل المتغيرات غير الأساسية يكون :

من أجل x_{11} **يكون :** $\overline{C_{11}} = C_{11} - u_1 - \vartheta_1 = 2 - 0 - 0 = 2$

من أجل x_{12} **يكون :** $\overline{C_{12}} = C_{12} - u_1 - \vartheta_2 = 4 - 0 + 2 = 6$

من أجل x_{23} **يكون :** $\overline{C_{23}} = C_{23} - u_2 - \vartheta_3 = 5 - 3 - 0 = 2$

من أجل x_{31} **يكون :** $\overline{C_{31}} = C_{31} - u_3 - \vartheta_1 = 6 - 4 - 0 = 2$

من أجل x_{42} **يكون :** $\overline{C_{42}} = C_{42} - u_4 - \vartheta_2 = 7 - 1 + 2 = 8$

من أجل x_{43} **يكون :** $\overline{C_{43}} = C_{43} - u_4 - \vartheta_3 = 9 - 1 - 0 = 8$

يلاحظ أن جميع الكميات $\overline{C_{ij}}$ **هي كميات موجبة ، وبالتالي فإن الحل الذي حصلنا عليه هو حلاً أمثلاً ، والكلفة الأصغرية للنقل هي :** $z_2 = 1285$ **.**

ملاحظة 4 :

عند وجود أكثر من قيمة واحدة سالبة من بين الكميات $\overline{C_{ij}}$ **فإن ينصح بما يلي :**

1. **إما نختار الأكثر سلبية أو**
2. **نشكل المسار المغلق لكل منهما ، ويلاحظ القيمة** θ **التي يمكن تمريرها في المربع الموافق لهذه الكمية السالبة** $\overline{C_{ij}}$ **، ثم ندخل المتغير الذي يحقق** $\overline{C_{ij}} * \theta$ **أكبر ما يمكن إلى مجموعة متغيرات القاعدة .**

ملاحظة 5 :

يلاحظ في الطريقة المعدلة أن المضاريب $u_i \; , \; \vartheta_j$ **ما هي إلا مجاهيل البرنامج المرافق للبرنامج الخطي الممثل لمشكلة النقل . وبالتالي فعندما تتحقق الشروط** $\overline{C_{ij}} \geq 0$ **، فهذا يعني تحقق الشروط الخطية وشروط الترافق و شروط عدم السلبية للبرنامج الأولي**

الممثل لمشكلة النقل وشروط البرنامج المرافق. كما يلاحظ أن المتغيرات $u_i \ , \ \vartheta_j$ للبرنامج المرافق غير خاضعة لشرط عدم السلبية، لأنها تقابل متساويات في قيود مشكلة النقل (البرنامج الأولي) .

ملاحظة 6 :

افترضنا فيما سبق أننا نعرف الكميات C_{ij} ، أي كلفة نقل الواحدة من كل مركز تصدير O_i إلى كل مركز استيراد D_j . يمكننا بسهولة معالجة الحالة التي لا يوجد فيها أي طريق يصل مركز التصدير O_{i_0} إلى مركز الاستيراد D_{j_0} ، وذلك بوضع $C_{i_0 j_0} = k$ ، حيث k عدد كبير جداً . وعندئذ لن تمر في الحل النهائي أية كمية من هذا الطريق ، إذ تكون هناك طرق أخرى ذات كلفة أقل من كلفة هذا الطريق .

ملاحظة 7 :

إذا وضعنا مشكلة النقل في جدول فيه $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ ، نجد أن طرح (أو إضافة) نفس العدد من أحد أعمدة المصفوفة $[C_{ij}]$ التي تمثل كلفة النقل للواحدة ، فإن هذا الطرح (أو الإضافة) لن يؤثر على الحل النهائي للمشكلة . بالفعل ، إن هذا الطرح (أو الإضافة) لا يغير القيود الخطية للمشكلة ولكنه يغير قيمة دالة الهدف فقط بطرح (أو إضافة) كمية ثابتة . فمثلاً ، إذا أضفنا إلى جميع عناصر السطر i_0 الذي سعته a_{i_0} الكمية λ فإن دالة الهدف يصبح :

$$z' = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} (C_{i_0 j} + \lambda)\, x_{i_0 j} =$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, x_{ij} + \lambda\, x_{i_0 j} = z + \lambda\, a_i$$

إذاً ، تتغير كلفة النقل ، إذ تزيد بالكمية الثابتة $\lambda\, a_{i_0}$ ، ولا يتغير فيما عدا ذلك حل مشكلة النقل . وبنفس الطريقة نبرهن إن إضافة العدد الثابت λ إلى جميع عناصر العمود j_0 الذي سعته b_{j_0} تؤدي إلى زيادة كلفة النقل بالكمية الثابت $\lambda\, b_{j_0}$.

ملاحظة8 :

إذا لم يكن عدد المربعات المشغولة مساوياً لـ $m + n - 1$ ، فإنه يجب وضع أصفار في بعض المربعات حتى نحافظ على العدد $m + n - 1$ للمربعات المشغولة .

المبحث السابع
حل مشكلة النقل لايجاد أكبر ربح

يطلب أحياناً إيجاد أكبر ربح ناتج عن عملية النقل . في هذه الحالة تكون القيم المعطاة في المصفوفة هي مقدار الربح الناتج عن عملية النقل بين كل مصدر وكل مركز استيراد . يمكن حل المشكلة في هذه الحالة باستخدام طريقة فوجل التقريبية (حالة إيجاد أكبر ربح) وفقاً للخطوات الآتية :

1. التأكد من توازن المصفوفة بين قيمتي المطلوب والمتاح من المواد المنقولة . إذا لم تكن المشكلة متوازنة ، نضيف سطر (أو عمود) يمثل مصنعاً أو مستودعاً وهمياً يضم الفرق المذكور . وتكون أرباح النقل المتحققة من استخدام خلايا هذا السطر أو العمود في النقل مساوية للصفر .
2. يحسب الفرق بين أكبر تكلفتين غير متساويتين في كل سطر وكل عمود.
3. نأخذ السطر أو العمود ذا الفرق الأكبر .
4. نختار المربع ذا الربح الأكبر في السطر أو العمود المختار ، ونعمل على تلبية طلبية مركز الاستيراد الذي يقع فيه هذا المربع من المصدر الذي يقابله .
5. نشطب السطر أو العمود الذي فرغ أو تمت تلبية طلبيته .
6. نعيد حساب الفرق مرة أخرى لكل من الأعمدة والأسطر ، ونكرر العملية السابقة إلى أن نلبي جميع طلبيات مراكز التوزيع من المصادر المتاحة .

ملاحظة 1 :

يراعى الترتيب في اعتماد السطر أو العمود للتوزيع بحيث ينظر أولاً إلى الأسطر ثم الأعمدة . وتختار أكبر قيمة فيهما ، فإذا تساوت قيمتان في الأسطر، فتؤخذ القيمة الأولى ، وكذلك في الأعمدة . وإذا تساوت قيمتان في الأعمدة والأسطر ، فتؤخذ القيمة الموجودة في الأسطر أولاً ، وهكذا .

ملاحظة 2 :

لاختبار مثالية الحل الناتج ، نتبع الطرق السابقة كما يلي :

1. **في طريقة الحجر المتنقل : نختبر الخلايا الفارغة ، فإذا كانت الكلفة غير المباشرة لجميع المتغيرات غير الأساسية سالبة أو صفراً ، فإن هذا يعني أننا وصلنا للحل الأمثل . أما إذا كانت إحدى القيم موجبة ، فإنه ممكن إدخال المتغير المقابل لأكبر قيمة موجبة إلى مجموعة المتغيرات الأساسية .**
2. **في طريقة التوزيع المعدلة : : نختبر الخلايا الفارغة ، فإذا كانت جميع القيم $\overline{C_{ij}} = C_{ij} - u_i - \vartheta_j$ سالبة أو صفراً ، فإننا نكون قد وصلنا للحل الأمثل . وإذا كانت هناك قيمة موجبة ، فإننا ندخل المتغير غير الأساسي المقابل لهذه القيمة إلى مجموعة المتغيرات الأساسية**

حالة تطبيقية 28:

يمثل الجدول التالي المطلوب والمتاح من المواد في شركةالإنشاءات ، وكذلك مقدار الربح الذي يمكن أن يتحقق نتيجة عملية النقل . والمطلوب الوصول إلى التوزيع الأمثل الذي يحقق أعلى ربح ممكن في حدود المطلوب والمتاح من المواد .

إلى من	D_1	D_2	D_3	D_4	الكميات المتوفرة
O_1	9	6	3	2	22
O_2	8	5	1	4	11
O_3	3	2	7	8	73
الكميات المطلوبة	30	60	15	17	106 122

الحـل :

يلاحظ أن المشكلة ليست في حالـة تـوازن لـذلك نضيف سطر (مركـز تصدير وهمـي) يعطى المقدار : $122 - 106 = 16$.

ويكون ربح النقل من هـذا المصدر إلـى كـل مراكـز الاستيراد صفراً . وبالتـالي ، تصبح المشكلة ممثلة بالجدول التالي :

إلى من	D1	D2	D3	D4	الكميات المتوفرة	فرق الأسطر (الكلفة الفرصية)
O1	9 22	6	3	2	22	3 3 3
O2	8 8	5 3	1	4	11	3 3 3 3
O3	3	2 41	7 15	8 17	73	1 5 1 1
O4	3	2 16	7	8	16	0 0 0 0
الكميات المطلوبة	30	60	15	17	122 122	
فرق الأعمدة (الكلفة الفرصية)	1 1 1 5	1 1 1 3	4	4 4		

يتم ايجادالحل المبدئي وفق طريقة الكلفة الفرصية كما هو موضح أعلاه . ويكون الربح في هذا الحل هو :

$$z = 22\times9 + 8\times8 + 3\times5 + 41\times2 + 15\times7 + 17\times8 + 16\times0 = 600$$

والمتغيـــــرات الأساســــية هـــــي : $x_{42}\ ,\ x_{34}\ ,\ x_{33}\ ,\ x_{32}\ ,\ x_{22}\ ,\ x_{21}\ ,\ x_{11}$

أما المتغيرات غير الأساسية فهي الخلايا الفارغة .

لنختبر فيما إذا كان الحل أمثلاً وفق طريقة الحجر المتنقل :

(10): لنشكل المسارات المغلقة لكل من المتغيرات غير الأساسية وفق الشكل
ولنحسب الكلفة غير المباشرة لكل من المتغيرات غير الأساسية حسب المسارات المغلقة المذكورة .

من أجل x_{12} يكون : $6-5+8-9=0$

من أجل x_{13} يكون : $3-7+2-5+8-9=-8$

من أجل x_{14} يكون : $2-8+2-5+8-9=-10$

من أجل x_{23} يكون : $1-7+2-5=-9$

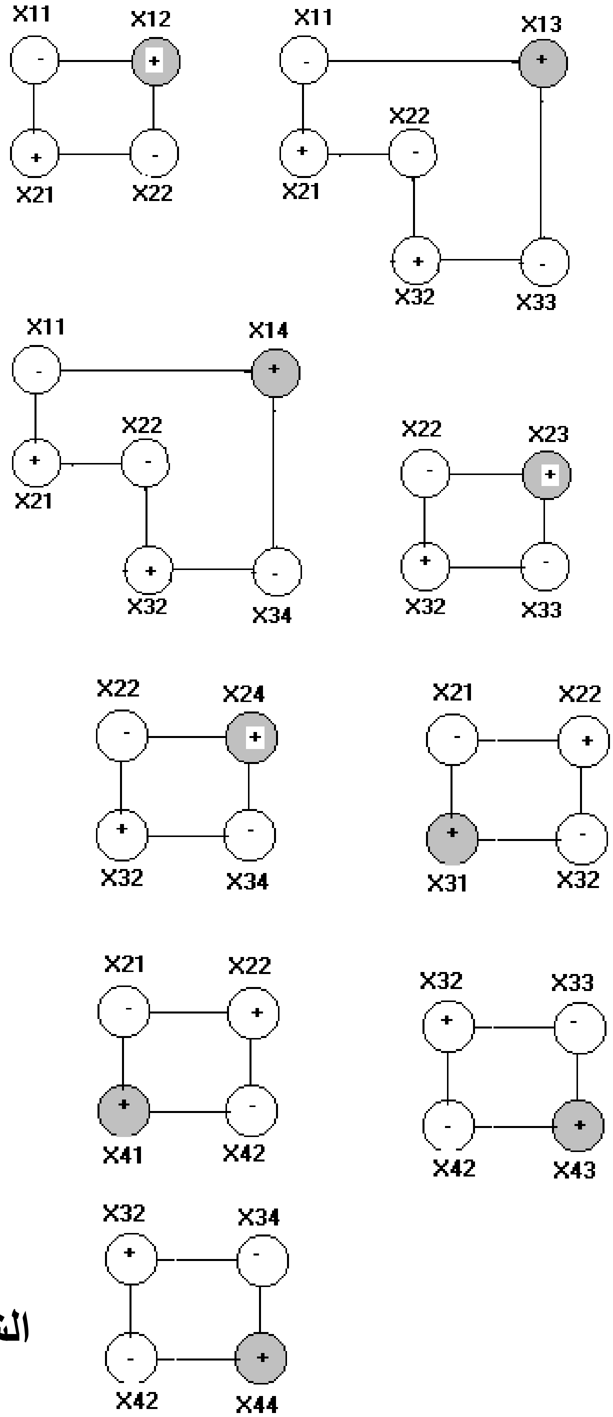
من أجل x_{24} يكون : $4-8+2-5=-7$

من أجل x_{31} يكون : $3-2+5-8=-2$

من أجل x_{41} يكون : $0-0+5-8=-3$

من أجل x_{43} يكون : $0-7+2-0=-5$

من أجل x_{44} يكون : $0-8+2-0=-6$



الشكل (10)

يلاحظ أن الكلفة غير المباشرة من أجل كل المتغيرات غير الأساسية هي مقدار سالب أو صفر . لذلك فإن الحل الذي حصلنا عليه هو حل أمثل ، والربح الاعظم هو $z = 600$**.**

حالات تطبيقية محلولة

حالة تطبيقية 29 :

لنفرض أن مادة متوفرة في مدينة A بكمية كافية ، يراد نقل ما يمكن منها وبأقل كلفة إلى المدينة B التي تطلب (110) طن ، وإلى المدينة C التي تطلب (40) طن . ولنفرض أن هناك وسائل نقل هي الطائرات والسيارات والقطارات ، التي تعطي سعاتها وأجرة نقل الطن الواحد فيها بالجدول التالي:

وسائل النقل	B	C	سعة وسائل النقل (المتوفر)
طائرات	12	10	20
سيارات	9	5	90
قطارات	6	3	50
المطلوب	110	40	160 / 150

الحل :

يلاحظ هنا أن الكمية المطلوبة هي 150 ولا تساوي الكمية المتوفرة 160 لذلك لا نستطيع تطبيق الطريقة الخاصة مباشرة ، وإنما يجب إضافة مركز استيراد (وهمي) يطلب الكمية الإضافية $a - b = 10$ التي يمكن نقلها من المدينة A . وتصبح مشكلة النقل بالشكل التالي :

	B	C	مركز وهمي	المتوفر
طائرات	12	10	0	20
سيارات	9	5	0	90
قطارات	6	3	0	50
المطلوب	110	40	10	160

بعد ذلك نبدأ بتطبيق الطريقة الخاصة لحل هذه المشكلة . ولنبدأ بتحديد حل مبدئي وفق طريقة الركن الشمالي الغربي فنجد الجدول :

	D_1 B	D_2 C	D_3 مركز وهمي	**الكميات المتوفرة**
طائراتO_1	12 20	10	0	20
سياراتO_2	9 90	5 0	0	90
قطاراتO_3	6	3 40	0 10	50
الكميات المطلوبة	110	40	10	160

يلاحظ أن عدد المربعات المشغولة $m + n - 1 = 5$ **، كما أننا اضطررنا لوضع صفر في المربع (2 , 2) من أجل تحقيق انتقال سليم والمحافظة على الشرط** $m+n-1$ **إن كلفة النقل وفق هذا الحل المبدئي هي :**

$$z_1 = 20\times12 + 90\times9 + 0\times5 + 40\times3 + 10\times0 = 1170$$

ولنرى هل هذا الحل هو حل أمثل أم لا ؟ . من أجل ذلك نطبق طريقة الحجر المتنقل (المسار المتعرج) .

يلاحظ أن المتغيرات الأساسية هي : x_{11} , x_{21} , x_{22} , x_{32} , x_{33}

والمتغيرات غير الأساسية هي : x_{12} , x_{13} , x_{23} , x_{31} .

نشكل المسارات المغلقة للمتغيرات غير الأساسية كالشكل (11):

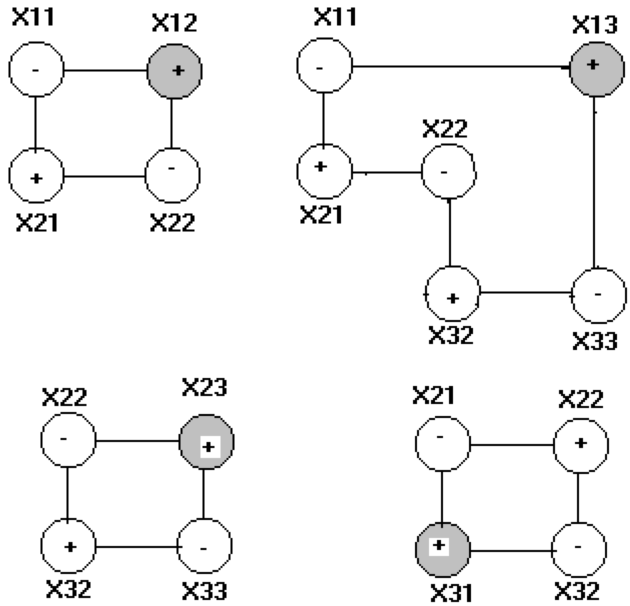
لنحسب الكلفة غير المباشرة من أجل كل من المتغيرات غير الأساسية :

من أجل x_{12} يكون : $10 - 5 + 9 - 12 = 2$

من أجل x_{13} يكون : $0 - 0 + 3 - 5 + 9 - 12 = -5$

من أجل x_{23} يكون : $0 - 0 + 3 - 5 = -2$

من أجل x_{31} يكون : $6 - 3 + 5 - 9 = -1$



الشكل (11)

يلاحظ أن الكلفة غير المباشرة سالبة من أجل المتغيرات غير الأساسية :
x_{13} , x_{23} , x_{31} . كما يلاحظ أن الكلفة غير المباشرة الأكثر سلبية من أجل المتغير x_{13} ، لذلك ندخله إلى مجموعة المتغيرات الأساسية ، ومن المسار المغلق يلاحظ أن الكمية التي نستطيع تمريرها في هذا المربع هي الصفر . نخرج بدلاً منه المتغير الأساسي x_{22} فيصبح غير أساسي، فنحصل على الجدول التالي:

	B	C	مركز وهمي	الكميات المتوفرة
طائرات	12 20	10	0 0	20
سيارات	9 90	5	0	90
قطارات	6	3 40	0 10	50
الكميات المطلوبة	110	40	10	160

إن كلفة النقل وفق هذا الحل هي :

$$z_2 = 20\times12 + 0\times0 + 90\times9 + 40\times3 + 10\times0 = 1170 = z_1$$

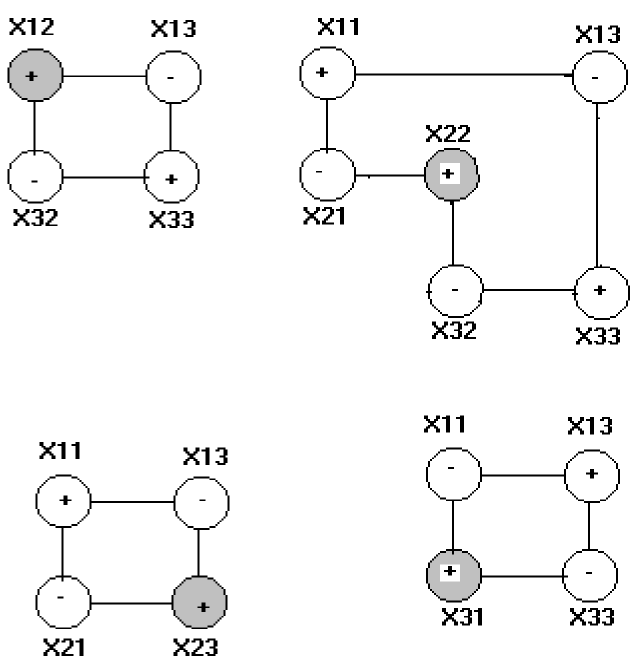
أي أن هذا الحل لم يحسّن أي شيء ، ولكن غيّر في المتغيرات الأساسية حيث أصبحت : $x_{11} , x_{13} , x_{21} , x_{32} , x_{33}$ **أما المتغيرات غير الأساسية فهي :** $x_{12} , x_{22} , x_{23} , x_{31}$ **، وتكون الكلفة غير المباشرة (12) . ولنشكل المسارات المغلقة لكل منها كما في الشكل من أجل كل متغير غير أساسي هي :**

كلفة x_{12} **يكون :** $10 - 0 + 0 - 3 = 7$

كلفة x_{22} **يكون :** $5 - 3 + 0 - 0 + 12 - 9 = 5$

كلفة x_{23} **يكون :** $0 - 0 + 12 - 9 = 3$

كلفة x_{31} **يكون :** $6 - 0 + 0 - 12 = -6$



الشكل(12)

. لذلك يلاحظ أن الكلفة غير المباشرة سالبة من أجل المتغيرات غير الأساسي x_{31} **ندخله إلى مجموعة المتغيرات الأساسية ، كما يلاحظ أننا نستطيع أن نمرر قيمة الكمية 10 فيصبح** $x_{31}=10$ **ونخرج المتغير الأساسي** x_{33} **ومنه نحصل على فيصبح غير أساسي . الجدول التالي :**

	B	C	مركز وهمي	الكميات المتوفرة
طائرات	12 10	10	0 10	20
سيارات	9 90	5	0	90
قطارات	6 10	3 40	0	50
الكميات المطلوبة	110	40	10	160

وكلفة النقل فيه هي :

$$z_3 = 10\times12 + 0\times10 + 9\times90 + 10\times6 + 40\times3 = 1110 < z_2$$

والآن ، نطرح السؤال من جديد ، هل هذا الحل أمثل أم لا ؟

يلاحظ أن المتغيرات الأساسية هي : x_{11} , x_{13} , x_{21} , x_{31} , x_{32}

والمتغيرات غير الأساسية هي : x_{12} , x_{22} , x_{23} , x_{33}

نشكل المسارات المغلقة لكل منها كما في الشكل (13) **:**

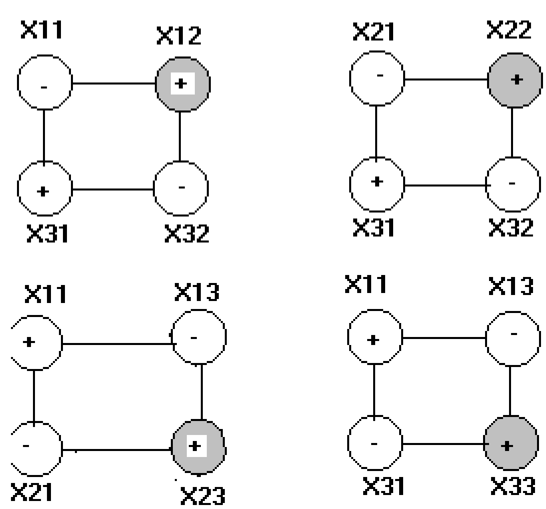
وتكون الكلفة غير المباشرة من أجل المتغيرات غير الأساسية هي :

من أجل x_{12} **يكون :** $10 - 12 + 6 - 3 = 1$

من أجل x_{22} **يكون :** $5 - 9 + 6 - 3 = -1$

من أجل x_{23} **يكون :** $0 - 0 + 12 - 9 = 3$

من أجل x_{33} **يكون :** $0 - 0 + 12 - 6 = 6$



الشكل (13)

، فندخلـه إلـى مجموعـة المتغيـرات x_{22}يلاحظ أن الكلفة غير المباشرة سـالبة مـن أجل x_{32} ، ونخـرج بـدلاً منـه المتغير $x_{22} = 40$الأساسية . ويلاحظ أننا نستطيع أن نمرر الكمية ليصبح غير أساسي ، فنحصل على الحل الممثل بالجدول التالي :

	B	C	مركز وهمي	الكميات المتوفرة
طائرات	12 10	10	0 10	20
سيارات	9 50	5 40	0	90
قطارات	6 50	3	0	50
الكميات المطلوبة	110	40	10	160

وتكون كلفة النقل وفقاً لهذا الحل كالتالي :

$$z_4 = 10\times12 + 10\times0 + 50\times9 + 40\times5 + 50\times6 = 1070 < z_3$$

ونعود لنطرح السؤال فيما إذا كان هذا الحل أمثلاً ؟ .

يلاحظ أن المتغيرات الأساسية هي : $x_{31}\ ,\ x_{22}\ ,\ x_{21}\ ,\ x_{13}\ ,\ x_{11}$

والمتغيرات غير الأساسية هي : $x_{33}\ ,\ x_{32}\ ,\ x_{23}\ ,\ x_{12}$

. (8)نشكل المسارات المغلقة لكل منها وفق الشكل

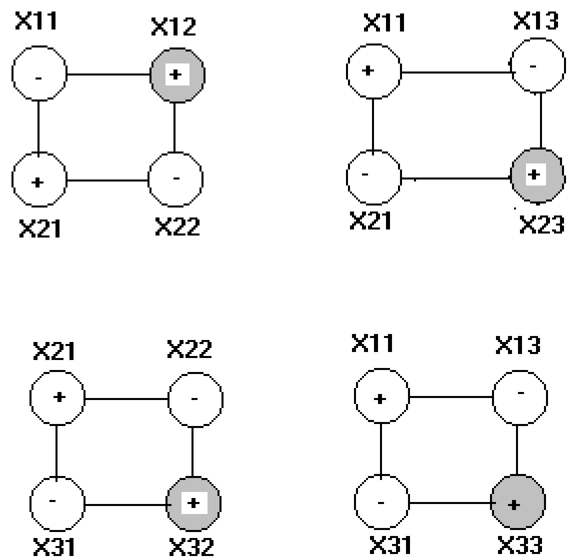
وتكون الكلفة غير المباشرة من أجل المتغيرات غير الأساسية هي :

من أجل x_{12} **يكون :** $10 - 12 + 9 - 5 = 2$

من أجل x_{23} **يكون :** $0 - 0 + 12 - 9 = 3$

من أجل x_{32} **يكون :** $3 - 5 + 9 - 6 = 1$

من أجل x_{33} **يكون :** $0 - 0 + 12 - 6 = 6$



الشكل (8)

أي أن جميع القيم موجبة ، وبالتالي فالحل الذي تم الحصول عليه هو حل أمثل ، والكلفة الأصغرية هي 1070.

حالة تطبيقية 30 :

يراد نقل كميات من القمح المتوفر في الصوامع $\{O_3 , O_2 , O_1\}$ إلى المطاحن $\{D_3 , D_2 , D_1\}$ فإذا كانت كلفة نقل الطن الواحد من القمح والكميات المطلوبة والمتوفرة معطاة في الجدول التالي :

المطاحن / الصوامع	D_1	D_2	D_3	الكميات المتوفرة
O_1	2	1	5	10
O_2	7	4	3	25
O_3	6	2	4	20
الكميات المطلوبة	15	18	22	55

أوجد الحل المبدئي لهذه المشكلة وفق كلاً من الطرائق الثلاثة :

آ - الركن الشمالي الغربي ،

ب - الكلفة الأقل ،

ج - طريقة فوجل .

ثم أوجد الحل الأمثل لهذه المشكلة والذي يعطي أفضل تنظيم لمشكلة النقل ، بحيث تكون الكلفة أصغرية وفق طريقة المضاريب (طريقة التوزيع المعدلة) .

الحل :

يلاحظ أن المشكلة في حالة توازن ، لذلك نبدأ مباشرة بتطبيق الطريقة الخاصة لحل مشكلة النقل .

إيجاد الحل المبدئي :

آ - طريقة الركن الشمالي الغربي :

عدد المتغيرات الأساسية : $m + n - 1 = 5$

وكلفة النقل وفق الحل المبدئي هي :

$$z = 10\times2 + 5\times7 + 18\times4 + 2\times3 + 20\times4 = 213$$

المطاحن الصوامع	D_1	D_2	D_3	الكميات المتوفرة
O_1	2 10	1	5	10
O_2	7 5	4 18	3 2	25
O_3	6	2	4 20	20
الكميات المطلوبة	15	18	22	

ب - طريقة الكلفة الأقل :

المطاحن الصوامع	D1	D2	D3	الكميات المتوفرة
O1	2	1 10	5	10
O2	7 3	4	3 22	25
O3	6 12	2 8	4	20
الكميات المطلوبة	15	18	22	55 55

كلفة النقل وفق هذه الطريقة هي :

$$z = 10\times1 + 3\times7 + 22\times3 + 12\times6 + 8\times2 = 185$$

يلاحظ أن الكلفة في هذه الطريقة أقل من تلك في طريقة الركن الشمالي الغربي.

ج - طريقة الكلفة الفرصية

المطاحن الصوامع	D1	D2	D3	الكميات المتوفرة	فرق الأسطر
O1	2 10	1	5	10	1 -
O2	7 3	4	3 22	25	1 1 4
O3	6 2	2 18	4	20	2 2 2
الكميات المطلوبة	15	18	22	55	
فرق الأعمدة	4 1 1	1 2 -	1 1 1		

كلفة النقل وفق هذه الطريقة هي :

$$z = 10\times2 + 3\times7 + 2\times6 + 18\times2 + 22\times3 = 155$$

الكلفة هنا أقل من الكلفة التي تم الحصول عليها في الطريقتين السابقتين .

البحث عن الحل الأمثل :

نأخذ الحل الأمثل الذي حصلنا عليه وفقاً لطريقة الكلفة الأقل .

المطاحن الصوامع	υ_1 D1	υ_2 D2	υ_3 D3	الكميات المتوفرة
u_1 O1	2	1 10	5	10
u_2 O2	7 3	4	3 22	25

u3 O3	6 12	2 8	4	20
المطلوب	15	18	22	55

نقرن بكل سطر المضروب u_i ، وبكل عمود ϑ_j ، ونشكل المعادلات :

$u_i + \vartheta_j = C_{ij}$ **من المربعات المشغولة (المتغيرات الأساسية) .**

من أجل متغيرات القاعدة يكون لدينا :

من أجل x_{12} **يكون :** $u_1 + \vartheta_2 = 1$

من أجل x_{21} **يكون :** $u_2 + \vartheta_1 = 7$

من أجل x_{23} **يكون :** $u_2 + \vartheta_3 = 3$

من أجل x_{31} **يكون :** $u_3 + \vartheta_1 = 6$

من أجل x_{32} **يكون :** $u_3 + \vartheta_2 = 2$

وبإعطاء u_1 **القيمة صفر ، وبحل المعادلات نجد :**

$$u_1 = 0 \ , \ u_2 = 2 \ , \ u_3 = 1 \ , \ \vartheta_1 = 5 \ , \ \vartheta_2 = 1 \ , \ \vartheta_3 = 1$$

من أجل المتغيرات غير الأساسية يكون لدينا :

من أجل x_{11} **يكون :** $\overline{C_{11}} = C_{11} - u_1 - \vartheta_1 = 2 - 0 - 2 = -3$

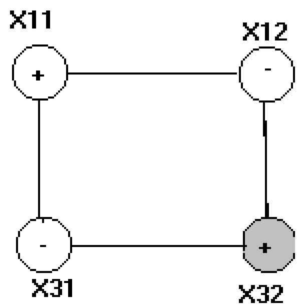
من أجل x_{13} **يكون :** $\overline{C_{13}} = C_{13} - u_1 - \vartheta_3 = 5 - 0 - 1 = 4$

من أجل x_{22} **يكون :** $\overline{C_{22}} = C_{22} - u_2 - \vartheta_2 = 4 - 2 - 1 = 1$

من أجل x_{33} **يكون :** $\overline{C_{33}} = C_{33} - u_3 - \vartheta_3 = 4 - 1 - 1 = 2$

أي أنه $\overline{C_{11}}$ **فقط سالبة .**

وبالتالي ، فإن الحل الذي حصلنا عليه وفق طريقة الكلفة الأقل ليس حلاً أمثلاً ولا بد لنا من تطوير هذا الحل . ومن أجل ذلك ، ندخل المتغير غير الأساسي x_{11} **إلى مجموعة المتغيرات الأساسية . ولمعرفة الكمية التي يجب أن نمررها للمتغير** x_{11} **نشكل المسار المغلق لهذا المتغير فنجده في الشكل (15):**



الشكل (9)

إلى 10 ونضيف x_{12} و x_{31} من كل من 10 وطرح 10 $x_{11} = 10$ يلاحظ امكانية وضع
x_{31}: فيصبح الحل كالتالي

المطاحن / الصوامع	υ1 D1	υ 2 D2	υ 3 D3	الكميات المتوفرة
u1 O1	2 / 10	1	5	10
u2 O2	7 / 3	4	3 / 22	25
u3 O3	6 / 2	2 / 18	4	20
الكميات المطلوبة	15	18	22	55 / 55

وتكون كلفة النقل وفقاً لهذا الحل كالتالي :

$$z = 10\times 2 + 3\times 7 + 2\times 6 + 22\times 3 + 2\times 6 + 18\times 2 = 155$$

والمتغيرات الأساسية هي : $x_{32}\ ,\ x_{31}\ ,\ x_{23}\ ,\ x_{21}\ ,\ x_{11}$

والمتغيرات غير الأساسية هي : $x_{33}\ ,\ x_{22}\ ,\ x_{13}\ ,\ x_{12}$

نقرن u_i **و** ϑ_j **بكل سطر وعمود ، ونشكل المعادلات :**

من أجل المتغيرات الأساسية يكون : $u_i + \vartheta_j = C_{ij}$

من أجل x_{11} **يكون :** $u_1 + \vartheta_2 = 2$

من أجل x_{21} **يكون :** $u_2 + \vartheta_1 = 7$

من أجل x_{23} **يكون :** $u_2 + \vartheta_3 = 3$

من أجل x_{31} **يكون :** $u_3 + \vartheta_1 = 6$

من أجل x_{32} **يكون :** $u_3 + \vartheta_2 = 2$

بإعطاء u_1 **قيمة صفر ، وحل المعادلات نجد :**

$$u_1 = 0\ ,\ u_2 = 5\ ,\ u_3 = 4\ ,\ \vartheta_1 = 2\ ,\ \vartheta_2 = -2\ ,\ \vartheta_3 = -2$$

مـــن أجـــل المتغيـــرات غيـــر الأساســـية يكـــون : $\overline{C_{ij}} = C_{ij} - u_i - \vartheta_j$

من أجل x_{12} **يكون :** $\overline{C_{12}} = 1 - 0 + 2 = 3$

من أجل x_{13} **يكون :** $\overline{C_{13}} = 5 - 0 + 2 = 7$

من أجل x_{22} **يكون :** $\overline{C_{22}} = 4 - 5 + 2 = 1$

من أجل x_{33} **يكون :** $\overline{C_{33}} = 4 - 4 + 2 = 2$

يلاحظ أن جميع القيم $\overline{C_{ij}}$ **موجبة ، وبالتالي فإن الحل الناتج هو حل أمثل، وكلفة النقل الأصغرية هي :** $z = 155$**.**

تمارين

1- الجدول التالي يمثل كلفة نقل البضائع من المصادر $(O_i\ ,\ i=1,2,3,4)$ إلى مراكز التوزيع $(D_j\ ,\ j=1,2,3)$

مراكز التوزيع / المصادر	D_1	D_2	D_3	الكميات المتوفرة
O_1	2	4	0	150
O_2	3	1	5	200
O_3	6	2	4	325
O_4	1	7	9	25
الكميات المطلوبة	150	320	200	

والمطلوب :

نظم طريقة النقل ، بحيث تكون الكلفة أصغرية ، مستخدماً طريقة الكلفة الأقل لإيجاد الحل المبدئي .

1 - تعتزم شركة نقل كميات من القطن من ثلاث محالج $\{O_1, O_2, O_3\}$ تتوفر فيها الكميات (15 25 5) طن على التوالي ، إلى أربعة معامل نسيج $\{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ تطلب الكميات $\{5\ ,\ 15\ ,\ 15\ ,\ 10\}$ طن . فإذا كانت كلفة نقل الطن الواحد من القطن من كل محلج إلى كل معمل موضحة بالجدول التالي :

	D_1	D_2	D_3	D_4
O_1	12	2	15	11
O_2	14	9	4	20
O_3	2	16	11	18

المطلوب :

1) أوجد حلاً مبدئياً لهذه المشكلة وفق كلاً من الطرائق الآتية :
أ- طريقة الركن الشمالي الغربي

ب- طريقة الكلفة الأقل

جـ- طريقة الكلفة الفرصية .

قارن بين هذه الحلول ، ماذا تستنتج ؟.

2) بالاعتماد على الحل المبدئي الذي حصلت عليه وفقاً لطريقة الركن الشمالي الغربي نظم عملية النقل بحيث تكون كلفة النقل أصغرية .
يخطط نقل (75) طن من القمح إلى كل مركز من مراكز طحن الحبوب الثلاث A , B , C ، والسيارات التي تتسع (135) طن . حيث يمكن استخدام القطار الذي يتسع لنقل (105) طن . إذا علمنا أن أجرة نقل الطن الواحد من القمح إلى كل مركز من إلى مراكز الطحن هي كما في الجدول التالي :

	A	B	C
بالقطار	10	5	6
بالسيارات	12	8	7

المطلوب :

تنظيم عملية النقل ، بحيث تكون كلفة النقل أصغرية .

2 - الجدول التالي يمثل مصفوفة الكلفة لمشكلة النقل الآتية :

مراكز توزيع مصادر	D_1	D_2	D_3	D_4	الكميات المتوفرة
O_1	4	11	0	2	100
O_2	9	6	1	3	190
O_3	5	7	2	10	200
الكميات المطلوبة	125	75	100	200	

المطلوب :

1) أوجد الحل المبدئي لمشكلة النقل أعلاه بثلاث طرق .

2) أوجد الحل الأمثل لمشكلة النقل بطريقتين .

3 - الجدول التالي يبين المتوفر والمطلوب من المواد وكلف النقل أو الربح الناتج عن عملية النقل .

مراكز التوزيع المصادر	D_1	D_2	D_3	الكميات المتوفرة
O_1	5	3	2	15
O_2	6	1	4	18
O_3	2	8	3	22
الكميات المطلوبة	16	24	15	

المطلوب :

الوصول إلى التنظيم الأفضل لهذه المشكلة ، معتبراً أن القيم ضمن المصفوفة تمثل :

1) كلف النقل بين المصانع وصالات العرض ، وبالتالي المطلوب في هذه الحالة تخفيض النفقات ، والوصول إلى الحل الأمثل الذي يوزع المتوفر بأقل الكلف .

2) الربح الناتج عن عملية النقل بين المصانع وصالات العرض ، وبالتالي فالمطلوب في هذه الحالة هو إيجاد أكبر ربح ، والوصول إلى الحل الأمثل الذي يوزع المتاح بأكبر ربح ممكن .

4 - أعد نفس الطلبات في المثال السابق من أجل هذا المثال الموضح في الجدول المقابل :

الكميات المتوفرة	D_3	D_2	D_1	مراكز التوزيع المصادر
70	9	11	18	O_1
75	15	12	8	O_3
95	19	15	13	O_2
40	8	15	14	O_4
	145	58	62	الكميات المطلوبة

ثم أثبت صحة النتائج التي توصلت إليها ، وذلك باستخدام طريقة التوزيع المعدلة في كل من حالتي تخفيض الكلف وإيجاد أكبر ربح .

الفصل الخامس

مشكلة التخصيص

Assignment Problem

مقدمـة :

تظهر مشكلات التخصيص في الحياة العملية بصورة متكررة . فقد يتطلب الأمر تعيين مجموعة من الأفراد بمجموعة من الأعمال ، أو أن تخصص مجموعة من الأعمال لمجموعة من الآلات .

المشكلة الأساسية التي تبحثها مشكلة التخصيص هي : أي من الأفراد يخصص لأي من الأعمال ، بحيث تكون فيه الكلف أدنى ما يمكن ، أو أن يكون مستوى الأداء أفضل ما يمكن .

تتميز مشكلة التخصيص بتحقق شرطين أساسيين : الأول ، أن يخصص لكل عمل واحد فرد واحد . وهذا يتطلب أن يكون جميع الأفراد قادرين على أداء جميع الأعمال ، ولكن في مستويات مختلفة من الكفاءة . والشرط الثاني ، أن يتحقق نتيجة التخصص أعلى مستوى من الأداء سواء كان الهدف زيادة الأرباح أم تخفيض الكلف إلى الحد الأدنى .

يمكن أن ينظر إلى مشكلة التخصيص على أنها حالة خاصة من مشكلة النقل . حيث يمكن أن نمثل مجموعة الأعمال بمراكز الاستيراد ، ومجموعة الأفراد بمراكز التصدير ، على أن يتوفر في كل مركز تصدير فرد واحد فقط ، وعلى أن يطلب كل مركز استيراد عامل واحد فقط. يمكن أن نفرض كلفة "نقل" تعيين الفرد i في العمل j بالقيمة C_{ij}.

إذاً ، مشكلة التخصيص هي نموذج من نماذج البرمجة الخطية ، حيث يمكن صياغته كما يلي :

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C_{ij} \; x_{ij}$$

$$S.t.$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad ; \qquad i = 1, 2, ..., n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad ; \qquad j = 1, 2, ..., m$$

$$(x_{ij} = 0 \quad \text{or} \quad 1)$$

قبل أن نبحث في حل البرنامج الخطي الممثل لمشكلة التخصيص ، فإنه من الضروري التأكد من أن المشكلة متوازنة . أي أن عدد الوظائف (الأعمال) مساوٍ لعدد الأفراد $m = n$. إذا لم تكن كذلك فإننا نضيف أفراد وهميين (إذا كان $n < m$) أو أعمال وهمية (إذا كان $m < n$).

المبحث الاول

طرق حل مشكلة التخصيص (التعيين)

هناك عدة طرائق لإيجاد الحل الأمثل لمشكلة التخصيص ، حيث تتفاوت كل طريقة عن الأخرى بعدد الخطوات المطلوبة للوصول للحل الأمثل . من هذه الطرائق :

1 - طريقة العد الكامل (أو طريقة الحصر) :

Solution by Enumeration Method

فرد . ثم n عمل مثلاً على mفي هذه الطريقة ، نبحث عن جميع التبديلات لتوزيع نحسب الكلفة الأصغر أو الربح الأعظم لكل تبديل ، ونختار التبديل الأفضل .

وظيفة ، فإن عدد mنذكر بأنه يمكن إيجاد التبديلات باستخدام مبدأ العد . فإذا كان لدينا m . ومن عيوب هذه الطريقة أنها طويلة وشاقة عندما يكون عدد الوظائف !mالتبديلات كبيراً .

2 - طريقة السمبلكس : وهي أن نكتب البرنامج الخطي المقابل لمشكلة التعيين ، ثم نبحث عن الحل الأمثل لهذا البرنامج باستخدام طريقة السمبلكس المعروفة .

3 - طريقة النقل : وهي أن نعتبر مشكلة التخصيص كمشكلة نقل ، ونحلها بطرق حل مشكلة النقل المعروفة ، سواء في حالة تخفيض الكلف أو إيجاد أكبر ربح .

4 - الطريقة الهنغارية (طريقة فلود Flood) .

المبحث الثاني
الطريقة الهنغارية

تتلخص هذه الطريقة بالخطوات الآتية :

1. **نختار أصغر عنصر في كل سطر ونطرحه من باقي عناصر نفس السطر .**
2. **نختار أصغر عنصر في كل عمود ونطرحه من باقي عناصر نفس العمود .**

نغطي الأسطر أو الأعمدة التي تحتوي على صفرين فأكثر بخطوط أفقية أو رأسية .

3. **إذا كان عدد الخطوط الأفقية والرأسية أقل من عدد الأسطر أو الأعمدة ، فإننا نكون لم نصل للحل الأمثل بعد ، وعليه ، فإننا نختار أصغر رقم من الأرقام التي لم تغطَّ بخطوط ، ونطرح هذا الرقم من باقي العناصر غير المغطاة ، ونضيف هذا الرقم إلى كل رقم عند تقاطع خط أفقي مع خط رأسي .**

4. نكرر ما ورد في الخطوة الثالثة حتى نحصل على الحل الأمثل (وذلك عندما يكون عدد الخطوط الأفقية والرأسية مساوياً لعدد الأسطر والأعمدة) ، ثم نوجد الحل الأمثل كما يلي :

أ- نبدأ بتخصيص الصفر الذي يقع في كل سطر ، وشطب الأصفار التي تقع في العمود الذي يقع فيه هذا الصفر .

ب- نبدأ بتخصيص الصفر في كل عمود ، ونشطب باقي الأصفار التي تقع في السطر الذي يقع فيه الصفر المخصص .

حالة تطبيقية 31:

لدينا ثلاث آلات C , B , A وثلاثة أوامر $1 , 2 , 3$ والجدول التالي يبين الوقت الزمني لتنفيذ الآلات للأمر المعين .

الأوامر الآلات	1	2	3
A	10	22	9
B	10	4	13
C	6	9	21

والمطلوب إيجاد التخصيص الأمثل الذي يحقق تنفيذ الأوامر الثلاث من قبل الآلات الثلاثة بأقل وقت ممكن .

الحل :

وفقاً لطريقة العد الكامل : نكون شجرة العد حسب الشكل (1): فنجد ،

التخصيص الأول : $A \rightarrow 1 , B \rightarrow 2 , C \rightarrow 3$ وتكلفته هي :

$$10+4+21=35$$

التخصيص الثاني : $A \rightarrow 1 , B \rightarrow 3 , C \rightarrow 2$ وتكلفته هي :

$$10+13+9=32$$

التخصيص الثالث : $1 \rightarrow B , 2 \rightarrow C , 3 \rightarrow A$ وتكلفته هي :

$$10+9+9=28$$

التخصيص الرابع : $1 \rightarrow B , 2 \rightarrow A , 3 \rightarrow C$ وتكلفته هي :

$10+22+21=53$

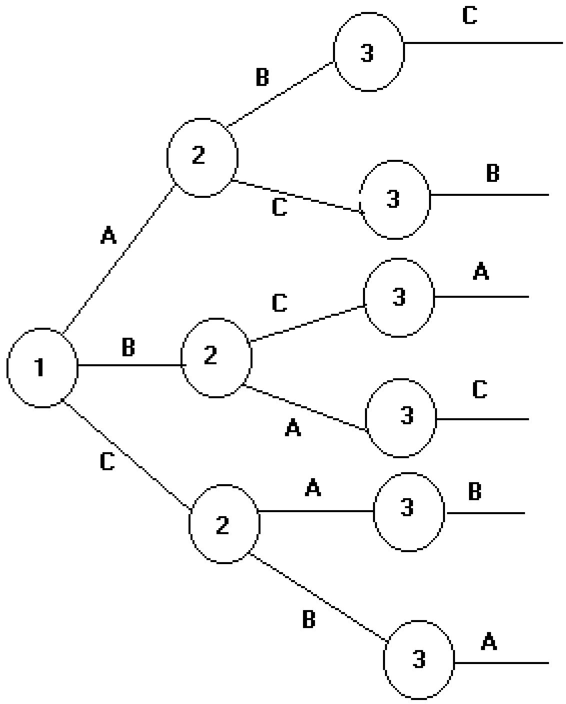
التخصيص الخامس : $1 \to C\ ,\ 2 \to A\ ,\ 3 \to B$ **وتكلفته هي :**

$6+22+13=41$

التخصيص السادس : $1 \to C\ ,\ 2 \to B\ ,\ 3 \to A$ **وتكلفته هي :**

$6+4+9=19$

فيكون الحل الأمثل لهذه البدائل هو أن يخصص :



$1 \to C\ ,\ 2 \to B\ ,\ 3 \to A$

الشكل(1)

حالة تطبيقية 32:

الجدول التالي يمثل الكلفة الزمنية لأربعة أشخاص سينفذون أربعة مهام. والمطلوب إيجاد التخصيص الأمثل ، بحيث يقلل الكلفة الإجمالية لتنفيذ هذه المهام .

المهام / الأشخاص	A	B	C	D
1	15	25	10	35
2	17	27	40	21
3	12	28	9	19
4	10	26	17	23

جدول (1)

الحل :

وفقاً للطريقة الهنغارية .

الخطوة الأولى : نختار أصغر عنصر من كل سطر ، ونطرحه من باقي عناصر السطر ، فينتج جدول الكلف غير المباشرة التالي :

المهام / الأشخاص	A	B	C	D
1	5	15	0	25
2	0	10	23	4
3	3	19	0	10
4	0	16	7	13

جدول (2)

الخطوة الثانية : نختار أصغر عنصر في كل عمود ونطرحه من أعمدة الجدول الناتج من الخطوة السابقة (الجدول (2)) ، فنحصل على الجدول (3).

الأشخاص \ المهام	A	B	C	D
1	5	5	0	21
2	0	0	23	0
3	3	9	0	6
4	0	6	7	9

جدول (3)

الخطوة الثالثة : نغطي الأسطر أو الأعمدة التي تحتوي على صفرين فأكثر بخطوط أفقية ورأسية كما هو مبين في الجدول (3).

الخطوة الرابعة : يلاحظ أن عدد الخطوط الأفقية والرأسية أقل من عدد الأسطر، لذلك الحل ليس حلاً أمثلاً الموجود في الجدول (3).

لذلك نقوم بتطوير الحل : نختار أصغر رقم من الأرقام غير المغطاة بخطوط و نطرح هذا الرقم من باقي العناصر غير المغطاة ، ثم نضيفه إلى كل رقم عند تقاطع خط أفقي مع خط رأسي . وفي مثالنا فإن الرقم هو 5 . ونحصل على الجدول رقم (4).

الأشخاص \ المهام	A	B	C	D
1	5	0	0	26
2	5	0	28	0
3	3	4	0	1
4	0	1	7	4

جدول (4)

الخطوة الخامسة : نكرر ما ورد في الخطوة الثالثة . يلاحظ أن عدد الخطوط التي يمكن أن تغطي الأصفار الأفقية والرأسية = 4 ، وهو مساوٍ لعدد الأسطر أو الأعمدة كما أنه يمكن تغطية الأصفار بعدد أقل من (4) خطوط . ولذلك ، فإن الحل الناتج هو حل أمثل .

الآن ، لنبدأ باستنتاج الحل :

- نبدأ بتخصيص الصفر الذي يقع في كل سطر وشطب الأصفار التي تقع في العمود الذي يقع فيه هذا الصفر المخصص .
- نبدأ بتخصيص الصفر الذي يقع في كل عمود ونشطب باقي الأصفار التي تقع في السطر الذي يقع فيه الصفر ، وهكذا كما هو واضح في الجدول (4) . ويكون التخصص الأمثل كما يلي :
- الشخص 1 نخصص له المهمة B بكلفة 25 دقيقة .
  الشخص 2 نخصص له المهمة D بكلفة 21 دقيقة .
  الشخص 3 نخصص له المهمة C بكلفة 9 دقيقة .
  الشخص 4 نخصص له المهمة A بكلفة 10 دقيقة .
  ويكون إجمالي الكلفة = 65 دقيقة .

تمارين

1 - يراد تعيين موظف واحد للترجمة ، وموظفين اثنين للآلة الكاتبة ، وموظف واحد في دائرة العلاقات العامة . تقدم للمسابقة الوحيد التي أجريت خمسة أشخاص A_5, A_4, A_3, A_2, A_1 . تم إجراء امتحان لهم في الترجمة والكمبيوتر والثقافة العامة ، فكانت علاماتهم كما يلي :

ملاحظة(1): إذا كان عدد الصفوف لا يساوي عدد الأعمدة أو بالعكس. فيتم إضافة سطر أو عمود وهي تكون الكلف فيه مساوية لـ (صفر). ثم نطبق نفس خطوات الطريقة الهنغارية.

ملاحظة(2): يطلب أحياناً حل مشكلة التخصيص لإيجاد أكبر ربح ناتج عن عملية التخصيص. في هذه الحالة يتم طرح جميع الأرباح في المصفوفة من أكبر ربح فيها وبذلك تتحول المصفوفة إلى مصفوفة كلفة ثم نطبق نفس الخطوات وفقاً للطريقة الهنغارية.

	الترجمة	الكمبيوتر	الثقافة العامة
A_1	9	10	9
A_2	7	6	5
A_3	7	8	5
A_4	9	8	8
A_5	5	7	1

ويفترض أن مردود كل منهم في كل وظيفة يتناسب مع العلامة التي نالها في المادة المقابلة لهذه الوظيفة (الثقافة العامة هي المادة المقابلة للعلاقات العامة).

المطلوب :

إيجاد أفضل تعيين لأربعة من المتسابقين ، بحيث يكون المردود الكلي أعظمياً.

2 - ترغب إحدى شركات الوجبات السريعة بناء أربعة مخازن في مدينة إربد. وقد تعاملت المنظمة في الماضي مع ست شركات إنشاءات مختلفة ، ولما كانت راضية عنهم جميعاً ، فقد دعتهم لتقديم عروض لكل عملية . وكانت العروض النهائية (بالألف دولار) كما في الجدول التالي :

	شركات الإنشاءات					
	1	2	3	4	5	6
المخزن1	85.3	88	87.5	82.4	89.1	86.7
المخزن2	78.9	77.4	77.4	76.5	79.3	78.3
المخزن3	82	81.3	82.4	80.6	83.5	81.7
المخزن4	84.3	84.6	86.2	83.3	84.4	85.5

ولما كانت شركة الوجبات السريعة ترغب في إنهاء هذه المخازن بأسرع وقت ممكن ، فإنها ستعطي لكل منظمةعملية واحدة على الأكثر .

ما هو التخصيص الذي ينتج عنه أقل كلفة كلية لشركة الوجبات السريعة .

المصطلحات

العلمية

A		
1	Additivity	الإضافة
2	**Algebric Method**	**الطريقة الجبرية**
3	**Algorithm**	**خوارزمية – طريقة حل**
3	**Artificial Variable**	**متغير اصطناعي**
4	**Assignment**	**التخصيص**

B		
5	Basic Solution	**حل أساسي**
6	Boundary Point	**نقطة محيطية**
7	Branch and Bound Method	**طريقة التفريع والتحديد**
8	Best Solution	**الحل الأفضل**
9	Big-M	**أسلوب أم الكبيرة**

C		
7	**Canonical Form**	**صيغة قانونية (معيارية)**
8	**Constraints**	**قيود**

D		
9	**Decision Theory**	**نظرية القرار**
10	**Decision Under risk**	**القرار بظل المخاطرة**
11	**Degeneracy**	**الانحلال (التفكك)**
12	**Divisibility**	**قابلية القسمة**
13	**Dual**	**مقابل – مرافق**
14	**Dynamic Programming**	**برمجة ديناميكية**

E		
15	**Extreme Point**	نقطة حدية
16	**Entering Variable**	المتغير الداخل

F		
17	**Feasible Region**	**منطقة الإمكانيات**
18	**Feasible Solution**	**الحل الممكن**

G		
19	**Games Theory**	**نظرية المباريات (الألعاب)**
20	**Graphical Method**	**طريقة بيانية**

H		
21	Hungarian Method	الطريقة الهنكارية

I		
22	**Infeasibility**	عدم وجود حل
23	**Integer**	**صحيح**
24	**Inventory Model**	**نماذج الخزين**

L		
25	Least Cost Method	طريقة الكلفة الأدنى
26	**Leaving Variable**	**المتغير الخارج**
27	**Linear Programming**	**برمجة خطية**

M		
28	**Management Science**	**علم الادارة**
29	**Mathematical Modeling**	**النمذجة الرياضية**
30	**Mathematical Programming**	**البرمجة الرياضية**
31	**Matrices**	**المصفوفات**
32	**Maximize**	**تعظيم**
33	**Minimize**	**تدنية (تخفيض)**
34	**Modified Distribution Method**	**طريقة التوزيع المعدل**
35	**Modling**	**النمذجة**
36	**M-Technique**	**أسلوب م**

N		
37	Net Works	**شبكات العمل**
38	Non Negativity	**اللاسلبية**
39	North West Corner	**الركن الشمالي الغربي**

O		
40	**Objective Function**	**دالة الهدف**
41	**Operations Research**	**بحوث العمليات**
42	**Opportunity Cost**	**كلفة فرصية**
43	**Optimal Solution**	**حل أمثل**

P		
44	Pivot Colum	**العمود المحوري**
45	**Pivot Element**	**العنصر المحوري**
46	**Pivot Row**	**الصف المحوري**
47	**Probabilities Theory**	**نظرية الاحتمالات**
48	**Programming**	**برمجة**
49	**Proportionality**	**التناسب**
Q		
50	**Queuing Models**	**نماذج الانتظار**

R		
51	**Random Distribution**	**توزيع عشوائي**
52	**Rationality**	**العقلانية**
53	**Redundant Contraints**	**قيد فائض (زائد)**

S		
54	**Simplex Method**	**طريقة السمبلكس**
55	**Simulation**	**المحاكاة**
56	**Slack Variable**	**متغير اضافي (فرق)**
57	**Standard Form**	**الصيغة القياسية**
58	**Stepping Stone**	**القفز على الحجر (الحجر المتحرك)**
59	**Strategy**	**استراتيجية**

T		
60	**Transportation Model**	**نموذج النقل**
61	**Two-Phase Method**	**طريقة المرحلتين**

U		
62	**Unbounded Solution**	**غير المحدودة الحلول**

V		
63	**Vertex**	**ذروة**
64	**Vogel's Method**	**طريقة فوجل**

المصادر والمراجع

أولاً : المصادر العربية

:

1. جزاع، عبد ذياب، بحوث العمليات، بغداد، الدار الجامعية للتوزيع والنشر، 1997.
2. النعيمي، محمد عبد العال وآخرون، مقدمة في بحوث العمليات، عمان ، دار وائل للنشر ،1999.
3. الفضل، مؤيد ، الاساليب الكمية في الادارة ،عمان ، دار اليازوري العلمية للنشروالتوزيع ،2004.
4. الحديثي، علي حسين ، وآخرون ، نظرية اتخاذ القرارات الادارية، عمان ، دار زهران، 2000.
5. العزاوي، محمد عبد الوهاب ، وزميله، إدارة الانتاج، الموصل ، دار الكتب للطباعة والنشر، 1992.
6. الحميد، محمد دباس، بحثو العمليات (1)، منشورات جامعة حلب، 2002.

أولاً : المصادر الأجنبية:

1. Adam, Evert E., Production and Operations Management.New Delhi, Prentice - Hall, 1996.
2. Kotler, Philip Marketing Management, 9th ed.,New York, Prentice-Hall, 1997.
3. Krajewski,Lee & Ritzman, Larry P. Operations Management Addison-Wesley publishing Co. 1999.
4. Lawrance J.R., Integrated Approach For Decision Making – Applied Management Science, New York, John Wiley And Sons ,1998.
5. Render B. Stair R.M. Quantitative Analysis For Management, New York,Prentice Hall,2000.
6. Taha, A.T. Operations Resaerch – An Introduction , New Jersy, Prentice Hall,1997.
7. Thomas R., Quantitative Methods For Business Studies, New York,Prentice Hall,2000.